Appels en peren / wiskunde en psychologie

Gebundelde opstellen

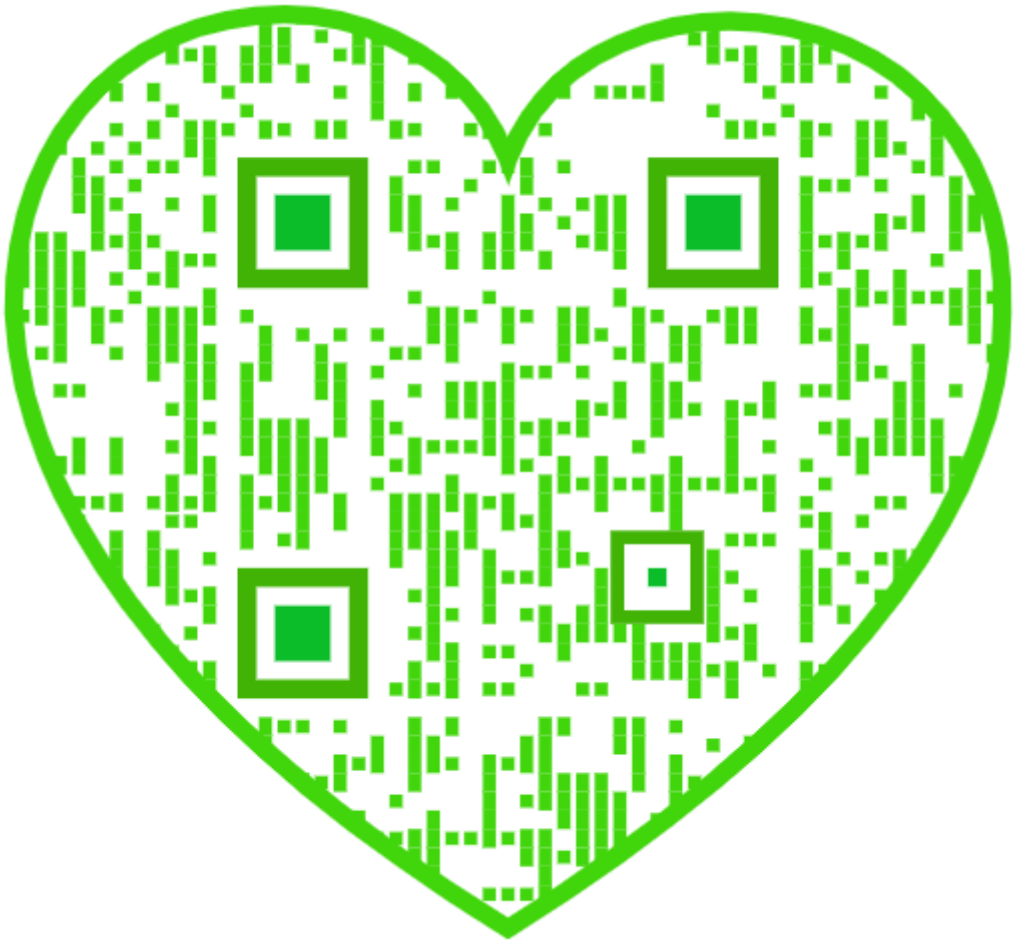
Hans Freudenthal

bron
Hans Freudenthal, *Appels en peren / wiskunde en psychologie*. Van Walraven, Apeldoorn 1984

Zie voor verantwoording: https://www.dbnl.org/tekst/freu002appe01_01/colofon.php

Let op: boeken en tijdschriftjaargangen die korter dan 140 jaar geleden verschenen zijn, kunnen auteursrechtelijk beschermd zijn. Welke vormen van gebruik zijn toegestaan voor dit werk of delen ervan, lees je in de gebruiksvoorwaarden.

dbnl digitale bibliotheek voor de Nederlandse letteren



Woord vooraf

Wie als auteur veel aan de weg timmert, zal uit een verscheidenheid moeten kiezen om opstellen tot een eenheid te bundelen. Voor het kleine aantal kralen om op te rijgen is de rode draad die de delen van zijn werk verbindt eigenlijk te lang en vertakt. Maar die rode draad is er: wiskunde in een context die voor de leerling zinvol en herkenbaar is om hem daadwerkelijk bezig te houden. De leerling (ik heb me in mijn keuze beperkt tot wat de basisschoolleerling (4-12) aangaat), uiteraard niet om hém aan te spreken, maar wel eens om naar hem te luisteren.

Wie in feite aangesproken worden zijn zij die rechtstreeks of minder rechtstreeks in het basisonderwijs werkzaam zijn, zij die voor deze werkzaamheid worden opgeleid, zij die ervoor opleiden, zij die steun verlenen aan het basisonderwijs als begeleiders, nascholers, ontwikkelaars, leerboekschrijvers; maar tenslotte ook zij die, op een hoger onderwijsniveau werkzaam, zich afvragen wat die wiskunde in het basisonderwijs is of zou moeten zijn waar zij geacht worden of menen voort te bouwen.

Het was geen gemakkelijke keus. Ik hoop dat ze in de smaak valt.

Hans Freudenthal

1. Onderwijsontwikkeling voor de kleuterschool - cognitief, wiskundig

Ik ben nooit in een kleuterklas geweest, zelfs niet toen ik zelf kleuter was. Ik heb me nooit systematisch met het kleuteronderwijs beziggehouden; mijn kennis omtrent de literatuur beperkt zich tot hetgeen ik toevallig tegenkwam, mijn ervaring tot de ongedwongen omgang met kleuters. Over deze ervaringen heb ik een enkele keer in rede of geschrift bericht. Aan wat hier volgt, ontbreekt elke systematiek. Ik heb niets nagestreefd dat ook maar enigszins definitief zou kunnen zijn. Wat zwaarwichtig zou kunnen lijken, plaatse men veeleer in het subjectieve dan in het objectieve vlak.

Ik begin met de vertaling uit het Duits van leerdoelen voor de kleuterschool op het vormingsgebied wiskunde uit Vorläufiger Rahmenplan für die Erziehungs- und Bildungsarbeit im Kindergarten[1].

Wiskundige, meetkundige en logische grondstructuren

(verzamelingen, getallen, relaties, begrip en constantheid van verzameling, elementaire logica (vorming van klassen en reeksen ook op andere leergebieden), vlakke en ruimtelijke relaties, tijdbegrippen, cardinaalvrije operaties, cardinaalgetallen, ordinaalgetallen, hoofdbewerkingen).

De grondslagen van het wiskundige en logische denken kunnen al op de kleuterschool geleerd worden. Het kind wordt tot de confrontatie met verzameling, vlak en ruimte geleid. Cardinaalvrije operaties worden ingevoerd. Eenvoudige logische grondstructuren komen hierbij tot uitdrukking.

Speciale gebieden

1. Elementen van een gegeven verzameling bepalen volgens de kenmerken kleur, vorm, grootte, sterkte, oppervlaktestructuur, materiaal, enzovoort.
2. De betekenis van een symbool (op een kenmerkenkaartje) weergeven, als opdracht opvatten en verbaliseren. De symbolen voor verschillende kenmerken vinden en zelf tekenen.
3. De eigen beslissingen en die van anderen bij spelen die naar de zojuist aangegeven leerdoelen leiden, geverbaliseerd motiveren.
4. Bij dergelijke spelen uit een aanvankelijk kleine, later groeiende en tenslotte alles omvattende verzameling een door anderen bepaald voorwerp vinden en zelf benoemen op grond van aanvankelijk twee, later alle kenmerken (kleur, grootte, sterkte, oppervlaktestructuur, materiaal), bijvoorbeeld: ‘wat is het grote, dikke, blauwe, ronde blok?’
5. Op een rooster voorwerpen rangschikken volgens een gegeven regel.

1 Vorläufiger Rahmenplan für die Erziehungs- und Bildungsarbeit im Kindergarten, in *Modellkindergärten in Nordrhein-Westfalen*, Landeskonferenz Düsseldorf, 8 September 1970. Herausgegeben von Minister für Arbeit, Gesundheit und Soziales des Landes Nordrhein-Westfalen.

6. Vatten en beschrijven van ruimtelijke relaties: rechts - links, binnen - buiten, inwendig - uitwendig, tussen - naast, boven - beneden, rechte, gesloten, open lijn.
7. Cardinaal- en ordinaalgetallen, gebaseerd op constantheid van verzameling en aantal, begrijpen en toepassen.
8. Hoofdbewerkingen in een beperkt getallengebied.

Het is me niet bekend of en hoe dit raamplan inmiddels definitief is geworden. Evenmin weet ik in welke mate het bovenstaande het leerdoeldenken voor de kleuterschool typeert. De algemeenheden van het eerste deel worden in het tweede deel - althans in de nummers 1 tot en met 5 - op een zeer stringente wijze gepreciseerd. Men ziet gauw door de taalkundige mistgordijnen van 1 tot en met 5 heen. Wat de auteurs van deze doelstellingen voor ogen zweeft, is materiaal van een bepaalde uitgever of bepaalde uitgevers die uiteraard niet bij naam en toenaam genoemd, maar op grond van deze gegevens zonder moeite geïdentificeerd kunnen worden. Dit materiaal is er om het classificeren volgens concrete kenmerken te beoefenen. Hoe dit moet gebeuren, is uit de handleidingen overgeschreven, waarbij niet nagelaten is tot twee keer toe het woord ‘spelen’ te misbruiken. Nummer 6 is wat schamele meetkunde, maar bij 7 en 8 wordt het echt menens: de hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen in een beperkt gebied, waarbij dan in het midden blijft hoe beperkt: tot 3, tot 5, tot 10, tot 20 of tot 100.

Wat ik aan voorbeelden van *expliciete* wiskunde op de kleuterschool ken, is - overeenkomstig de leerdoelen van het bovengenoemde raamplan - te karakteriseren als vervroegde wiskunde uit de basisschool en dan een wiskunde van de basisschool, die van haar kant als vervroegde wiskunde voor het voortgezet of het hoger onderwijs gekenschetst zou kunnen worden. Het lijkt me beter naar materiaal voor de kleuterschool uit te kijken waarin wiskunde, voor zover aanwezig, geïntegreerd optreedt. Dit betekent uiteraard dat ik dit soort materiaal als totaliteit moet bekijken en niet alleen op wiskundige aspecten.

Van een Duitse methode[1] is mij een Nederlandse bewerking[2] bekend. De titel van het Duitse origineel belooft taaloefening en bevordering van intelligentie; de Nederlandse bewerking is op verkenning uit. Het zijn 10 series werkbladen. Het eerste blad van elke serie is een gekleurde plaat, van ‘spel en speelgoed’ tot ‘in het warenhuis’. De gekleurde platen zijn het beste als etalages te kenmerken. Het is een samenraapsel van een groot aantal voorwerpen en personen, zonder veel onderling verband. Er gebeurt niets of bijna niets op de platen. Ze stellen geen verhaal voor, illustreren ook geen verhaal. Natuurlijk kunnen er aan de afzonderlijke voorwerpen op de plaat verhaaltjes vastgeknoopt worden, waartussen ook nog verbanden zouden

1 K. Schüttler-Janikulla e.a., *Arbeitsmappen zum Sprachtraining und zur Intelligenzförderung für Kinder 4-7 Jahre im Elternhaus, im Kindergarten, in der Vorklasse und im Anfangsunterricht der Schule*, 3 mappen, Oberursel/Ts.

2 J.G.L. Steeghs, Drs R. de Groot en L.N.M.H. Hermans, *Verkenningsbladen*, 2 mappen, en J.G.L. Steeghs *Handleiding voor verkenningsbladen*, 2 mappen, IJmuiden, 1974.

kunnen worden gelegd. Op de gekleurde plaat volgt in elke serie een overeenkomstige plaat met omtrekken, die naar het voorbeeld ingekleurd kan worden. Aangezien de modelplaat nogal geschakeerd is, is dit inkleuren vrij bewerkelijk; de kleuters zijn er zeker een uur mee zoet. Hierop volgen gekleurde plaatjes van onderdelen van de grote plaat - soms met variaties - en hiermee corresponderende, opnieuw in te kleuren omtrekplaatjes, die soms ook geschikt zijn om uit te knippen.

Volgens de details in de Nederlandse handleiding staat inderdaad taaloefening als doelstelling voorop, zoals in de Duitse titel is aangegeven. De taaloefening zou geschieden via het ‘lezen’ van de platen, dat wil zeggen het *benoemen* van de afgebeelde voorwerpen, van hiermee verband houdende activiteiten en van in de plaat uitgedrukte relaties. Taaloefening wordt hier, zoals over het algemeen gebeurt, geïdentificeerd met verwerven van vocabulaire, waarbij uiteraard de zelfstandige naamwoorden als aanduiding van de voorwerpen de dienst uitmaken; werkwoorden, bijvoeglijke naamwoorden en structurele taalelementen spelen kwalitatief en kwantitatief een ondergeschikte rol. Wat het nagestreefde vocabulaire betreft, zijn de zelfstandige naamwoorden trouwens gezien hun oorsprong van grof concrete aard.

De importantie van taalbeheersing staat buiten elke discussie; zonder taalbeheersing is er geen sociale en individuele ontplooiing mogelijk. In een taalrijk milieu opgevoed te worden is een privilege; een taalarm milieu is een handicap waar kinderen moeilijk overheen komen. Het lijdt geen twijfel, of de kleuterschool - of welke school dan ook - moet de taalbeheersing van de haar toevertrouwden bevorderen.

Nu is het eveneens duidelijk dat taal leren en onderwijzen een overwegend impliciet gebeuren is. Hoe jonger het kind, des te meer overweegt in het leerproces het impliciete. Daarnaast ontwikkelt zich geleidelijk het expliceren: het corrigeren door anderen van taaluitingen van het kind, het voorzeggen van woordjes, het antwoorden door ouderen op vragen ‘hoe heet dat?’ en, ten behoeve van het leren spellen en het aanleren van vreemde talen op latere leeftijd, het analyseren van taaluitingen. Maar kwalitatief en kwantitatief is dit expliceren verwaarloosbaar vergeleken bij wat impliciet verworven wordt.

Wil expliciete taaloefening doel treffen, dan moet zij goed gericht zijn. Het aanleren van vocabulaire is dit niet en zeker niet als in dit vocabulaire de zelfstandige naamwoorden overheersen. Taal is geen optelsom van woorden evenmin als cognitie een optelsom van begrippen is. Het is een - betreurenswaardig - feit dat de psychologie van het cognitieve gebeuren beheerst wordt door het denkbeeld van begripsverwerving (concept attainment). Taalontwikkeling en taaloefening door vocabulaireverwerving is daar de taalkundige tegenhanger van.

Taaldidactici die hun taak in deze zin interpreteren, bevinden zich dus in een goed psychologisch gezelschap. Het is echter de vraag of het onderwijs hiermee gebaat is. Nu is het aanleren van vocabulaire zeker een nuttige bezigheid, maar zoiets kan van averechts nut zijn als de nadruk op vocabulaire

een onjuist accent is. Ik vrees dat dit inderdaad het geval is. De nadruk op taal als vocabulaire leidt af van taal als structuur. Taalbeheersing is vooral een beheersing van taalstructuur; ook vocabulaire kan, op het primitiefste na, alleen binnen die structuur worden begrepen en verworven. Voorbeelden hiervan zijn er te kust en te keur. Mij schiet er net een uit Piaget te binnen, waar hij, zonder hiermee rekening te houden, de logica van het woord 'alle' ontwikkelingspsychologisch onderzoekt. Het ondubbelzinnig lijkende woord 'alle' speelt in 'alle op de foto zijn honden' en 'op de foto zijn alle honden' een dubbelzinnige rol, naar gelang van de zichtbaar en hoorbaar gemaakte structuur.

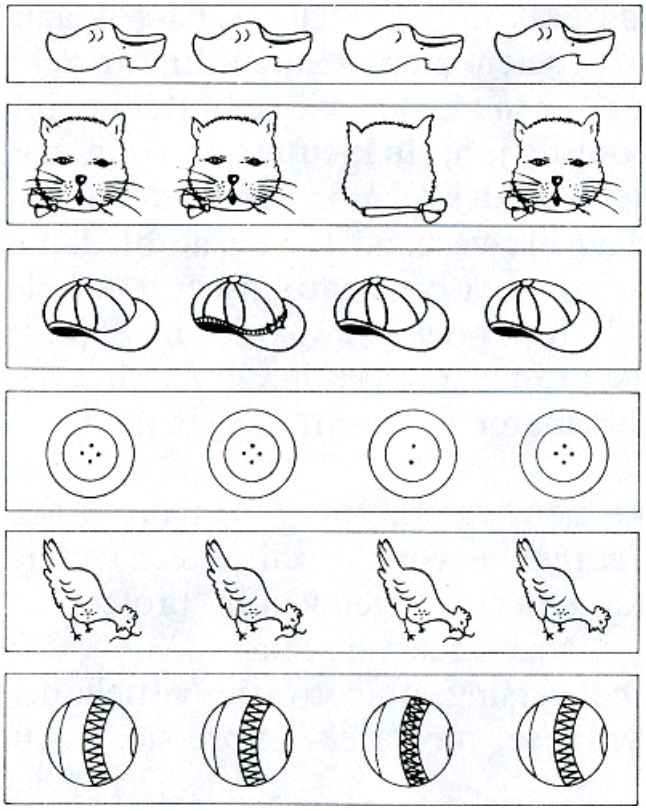
Zijn kleuters al aan dergelijke finesses toe? Het doet er niet toe. Je zou je veeleer moeten afvragen, of ze dan aan de verschraling van de taal tot vocabulaire toe zijn, een stadium dat door het kunnen gebruiken van de 'Van Dale' te kenmerken is. Schrale structuren en structuurloosheid zijn minder des kinds dan rijke. Een kind leert zijn taal impliciet, in de omgang. Het kan ook in de omgang met zulk materiaal. Maar dan, zou ik zeggen, gebeurt het ondanks het materiaal, dank zij het praten met en het luisteren naar leeftijdsgenoten en een leidster die iets met het materiaal kan doen. Maar die kan met elk materiaal iets doen.

De Duitse titel belooft naast taaloefening ook bevordering van intelligentie. Taaloefening komt ook de intelligentie ten goede, maar voor de rest zie ik in het materiaal niets dat speciaal op intelligentie aanstuurt, zeker niet in de niet ongebruikelijke zin van training op intelligentietoetsen. De Nederlandse titel belooft 'verkenning' en de handleiding levert hiervoor nogal wat aanwijzingen. Maar deze aanwijzingen staan los van het gebruik van werkbladen, althans van dit soort werkbladen. Je kunt je uiteraard afvragen of werkbladen een goed uitgangspunt voor verkenning zijn, en zo ja of povere werkbladen, zoals deze, waar nog alles in te vullen is, geschikter zijn dan rijke, de verbeeldingskracht stimulerende dan wel beperkende. Ook hierop kan het antwoord alleen metterdaad worden gegeven, dat wil zeggen door de leidster die ermee werkt. Zij kan er *iets* van maken of *niets*. Materiaal moet motiveren, niet alleen de kinderen, maar ook de leidster. De handleiding vertoont meer motiverende kracht dan de werkbladen; de werkbladen leiden veeleer van motivatie af dan er naar toe.

'Bevordering van intelligentie' staat wél hoog aangeschreven in de *AA Speelwerkbladen*[1], althans indien dit geïnterpreteerd wordt in de zin van training op intelligentietoetsen. Deze speelwerkbladen worden volledig gekarakteriseerd door de twee hier afgedrukte voorbeelden (figuren 1.1 en 1.2).

Wat *Speelwerkbladen* wordt genoemd, bestaat geheel en al uit (niet-verbale) intelligentietoetsen van het voor die leeftijd gebruikelijke soort. Door deze

1 C.A. van Aart en A.H. Annokkee, *AA Speelwerkbladen* en *Toelichting op de AA Speelwerkbladen*, IJmuiden, 1966. Zie ook van dezelfde auteurs *Speelwerkbladen voor de lagere school* (met handleiding), zesde druk, Groningen, 1972.



Welke is anders?
Opdracht: *Bekijk de klompjes goed.*
Er is er een anders.
Zet daar een streepje onder.
Enzovoort.
figuur 1.1

Wat hoort er niet bij?
Opdracht: *Wat zie je op de eerste regel? Eén van die dingen hoort er niet bij. Zet daar een streep door. Enzovoort.*
figuur 1.2

toetsen te maken leert het kind zeker iets, althans als de juffrouw de toetsen verbetert. Als het niets anders leert, dan leert het kind in elk geval toetsen maken. Toetsen kunnen maken is een bekwaamheid die in onze maatschappij hoog gewaardeerd wordt. Vroeger zei je ‘examens’ in plaats van ‘toetsen’. De moderne ‘toetsen’ zijn gemakkelijker te hanteren en te evalueren, vooral door het opsplitsen in deelvaardigheden waarvan je meent dat ze op de een of andere manier relevant zijn.

De vraag is natuurlijk: moet je het maken van dit soort toetsen *onderwijzen*? En de vraag is vooral klemmend, omdat de optelsom van deze geïsoleerde toetsen, indien onderwezen, een geatomiseerd en gereduceerd onderwijs betekent; van de hak op de tak in plaats van geïntegreerd spel en werk. Dit is een algemeen feit, maar met het oog op dit specifieke onderwijs vraagt men zich af: moet dit nu ook al voor kleuters, het trainen voor toetsen en examens? Het antwoord ligt voor de hand: Ja, want straks moeten ze de lees- en rekenvoorwaardentoetsen ondergaan.

In wezen hetzelfde karakter, maar dan toch heel wat gemitigeerd en verrijkt, vertonen de *Speelwerkboekjes voor jonge kinderen*[1]. De intelligentie-

1 F.O. Schmaderer, Th. en W. Zacharias, *Spelen zien denken - Speelwerkboekjes voor jonge kinderen*, bewerkt door W. van Dongen en L.A. Sol, De Bilt/Zeist, 1972.

toetsen zijn hier genuanceerder gepresenteerd. De kinderen moeten niet alleen het juiste aanstrepen, maar mogen ook knippen, kleuren, passen, aanvullen; het is echt zoals de titel belooft: spelen, zien, denken. Er zijn zelfs geweldig leuke vondsten bij. Ik vraag me alleen af voor wie ze bestemd zijn, deze door elkaar gehutselde opgaven voor de jongste kleuters en voor, zeg, zeven- à achtjarigen. Is het een leergang? De boekvorm in liefst 6 delen verleidt tot een bevestigend antwoord. Maar elk verband tussen de bladen is - op de nietjes na - zoek. Het kind wordt met een geatomiseerde wereld geconfronteerd. Af en toe een bladzij uit deze boekjes, waarom niet? Maar de verleiding is groot zoiets achter elkaar af te werken en het gevaar bestaat dat het onderwijs als zodanig op dit soort materiaal wordt afgestemd.

Biedt de werkgroep 'Heemskerk'[1] misschien wat ik zoek? Wat bij oppervlakkig doorbladeren *Projekten voor kleuters* het eerst opvalt, is een wetenschappelijk aandoende systematiek. Het geheel is ingedeeld in 'projecten', en elk 'project' is volgens een identiek schema onderverdeeld: inleiding, kringgesprek, zingeving, taalbeheersing, objectivatie, visuele discriminatie, auditieve discriminatie, synthese, motoriek, expressie, documentatie.

Maar de auteurs stellen ons gerust:

'In dit programma, dat is bestemd voor de oudste kleuter, is er eigenlijk niets anders gedaan dan dat er een etiket is geplakt op een aantal spelletjes, oefeningen, opdrachtjes, werkbladen enzovoort, om een systeem aan te geven in allerlei spel- en speelvormen, materialen en mogelijkheden om deze te plaatsen in het perspectief van een continu onderwijsproces, dat van de kleuterschool in de lagere school gewoon doorgaat.' (pag. 11.)

Het klopt inderdaad dat die etikettering niets om het lijf heeft. Het zijn laatjes die ten koste van alles gevuld moeten worden. Ook de term 'project' - en daarmee de hele titel - slaat nergens op. Er is niets dat aan projectmatig werken doet denken. Er zijn ongeveer 100 werkbladen, waar een zeer omvangrijke collectie van spelletjes, oefeningen, opdrachtjes omheen is geschreven; los zand bijeengegaard tot wat projecten heten te zijn. Het materiaal is voldoende voor, zeg, tien jaren kleuterschool.

Met deze *Projekten voor kleuters* zijn ervaringen opgedaan:

'In de afgelopen 4 jaar dat nu met dit programma op 23 kleuterscholen is gewerkt is dit duidelijk van invloed geweest. Dit was duidelijk waar te nemen aan de scores van de leerlingen (± 700 per jaar) op de leesvoorwaardentoets. Zo was de gemiddelde "score" op deze toets 42.3 in het schooljaar 1971-1972. In het schooljaar 1974-1975 was die gemiddelde score opgelopen tot 48.7. Bij de overige 100 scholen, die ook met de projekten hebben gewerkt, zijn geen gegevens verzameld. Wel is uit de gesprekken met deze leidsters gebleken, dat ook zonder begeleiding met deze projekten gewerkt kan worden. Uit deze cijfers zou wellicht de conclusie getrokken kunnen worden dat dit programma er op gericht is ook al in de kleuterscholen pres-

1 Sj. Homminga e.a., *Projekten voor kleuters*, Purmerend, 1976.

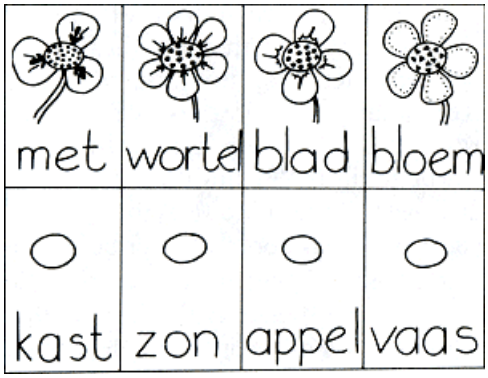
tatiegericht te werken. Als dit uw conclusie zou zijn, zouden wij het op prijs stellen dat u niet met dit programma ging werken, want het is de bedoeling van de werkgroep geweest een programma te ontwikkelen waar de kinderen op de kleuterschool met plezier aan zouden werken en dat inhoudelijk zijn vervolg vindt in het basisonderwijs. Dit programma heeft wel tot gevolg - en zo verwonderlijk is dat niet - dat meer kinderen beter in staat zijn het onderwijs gedurende het eerste leerjaar op de basisschool te volgen. Dit betekent tevens - en dat vindt de werkgroep het belangrijkst - dat nu meer kinderen, die anders op de een of andere manier zouden stuk lopen in het basisonderwijs, plezier blijven houden in het naar school gaan, omdat ze nu niet worden geconfronteerd met teleurstellende schoolresultaten. Dit kon namelijk worden geconcludeerd aan de hand van toetsresultaten na het proces van het aanvankelijk lezen. Er was sprake van een continue daling van het aantal kinderen dat na vier maanden nog moeilijkheden had met bijvoorbeeld het kennen van de letters, analyse- en syntheseoefeningen. Ook de scores op twee toetsen die worden afgenomen aan het eind van het eerste leerjaar, de toetsen “Beelddikte” (bedoeld is “Beelddiktee” - H.F.) en “Begrijpend lezen”, gaven een steeds hoger gemiddelde te zien.

Dit programma heeft ook zijn nut bewezen voor kinderen die hebben deelgenomen aan een schoolrijpheidsonderzoek. De uitslagen op bijvoorbeeld een Nijmeegse Schoolbekwaamheidstest of Begrippentoets II zijn namelijk heel gemakkelijk te vertalen in de onderdelen van de projekten. De advisering aan kleuterleidsters over deze kinderen gaat dan ook in de terminologie die bij de projekten hoort. Op deze wijze kan een kleuterleidster dan iets gerichter een kind helpen op die gebieden waar het nog wat hulp nodig heeft.’ (pag. 15-16.)

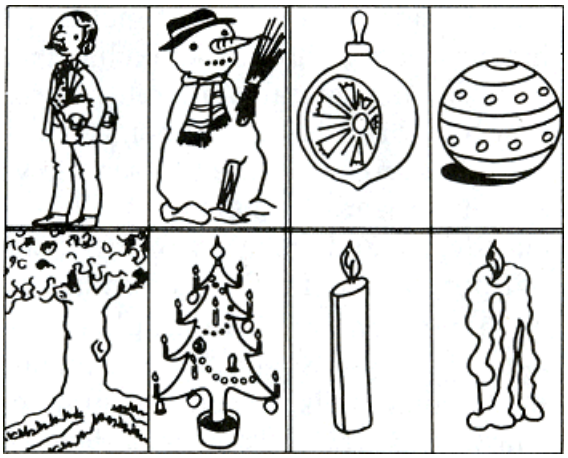
Het succes, voor zover meetbaar en gemeten in voorwaarden- en schoolrijpheidstoetsen, is onmiskenbaar. Het zou interessant zijn te weten hoe dit succes behaald is. Het werkplan, zoals hier gepresenteerd, biedt genoeg stof voor tien kleuterjaren. Welke delen hiervan zijn in het feitelijk onderwijs gerealiseerd en hoe hangen de gemeten successen af van de keuzen die in de afzonderlijke klassen uit dit werkplan werden gemaakt? Het enige uit dit werkplan dat ‘gematerialiseerd’ is, zijn de werkbladen. Deze zijn in onbeperkte mate beschikbaar om aan de kleuters te worden verstrekt en vormen het meest intensieve element van het werkplan. Intensief voor kinderen, maar ook voor de leidster. Ze zal zeker af en toe ook een blik in het voor háár bestemde boek van 126 bladzijden slaan, maar de uitwerking hiervan zal het nooit halen bij die van het permanent mét de kinderen bezig zijn met de werkbladen.

Is het een te gewaagde veronderstelling aan te nemen, dat deze 100 werkbladen de vaste kern zijn geweest van wat in de 23 participerende kleuterscholen met dit werkplan is gedaan? Mag men dan niet concluderen dat het in toetsen gemeten succes van dit werkplan in wezen is toe te schrijven aan deze vaste kern, aan de 100 werkbladen? Er is dus alle aanleiding die werkbladen nader te bekijken. Ze bestaan voor zeker de helft uit niet-verbale intelligentietoetsen van het gebruikelijke soort, sommige kaal, sommige speels aangekleed. De variëteit en de kwaliteit van deze toetsen zijn min-

der dan die van de eerder hier besproken reeksen intelligentietoetswerkbladen. Er komen veel herhalingen in voor; er is meer oefenstof voor de afzonderlijke types dan elders gebruikelijk, maar het aantal types is beperkter. Behalve de werkbladen van het intelligentietoets-type zijn er echter ook andere, die meer rechtstreeks aansturen op ‘leesvoorwaarden’. De merkwaardigste produktie - ik heb iets dergelijks niet eerder gezien - is hetgeen het hele werkplan door als werkbladen onder de vreemde titel ‘objectivatie’ wordt gepresenteerd. Ik geef er enkele voorbeelden van (figuren 1.3 en 1.4).



figuur 1.3
Voor iedere letter uit het woord is een blaadje getekend.
Tel de blaadjes, tel de letters van het woord. Klap de blaadjes.
Welke bloem heeft de meeste blaadjes?
Welk woord is het langst, het kortst?
Teken op de onderste rij zoveel blaadjes aan de bloem als er letters in het woord staan.



figuur 1.4
Zet een streep door het langste woord.

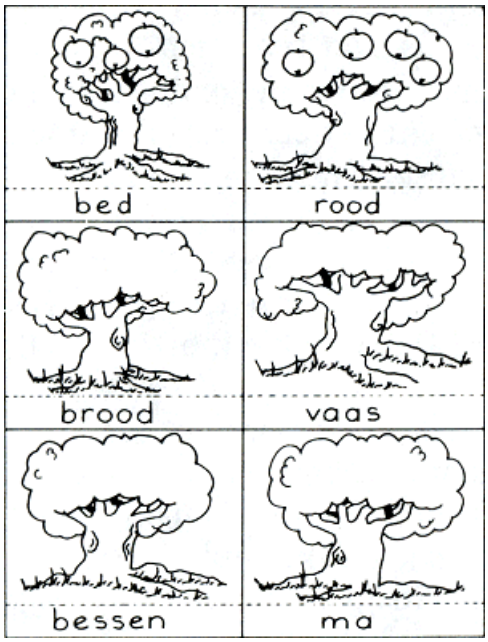
man	*- sneeuwman*
boom	*- kerstboom*
kerstbal	*- bal*
druipkaars	*- kaars*

Er zijn ook nogal wat werkbladen met tekeningen voor aanvul- en overtrektoetsen en, zoals eerder vermeld, het intelligentietoets-type. Veel is er, wat je noemt, met de haren bij gesleept; zinloze, ongemotiveerde opdrachten waaraan men moeilijk enige rol in een leerproces kan toekennen.

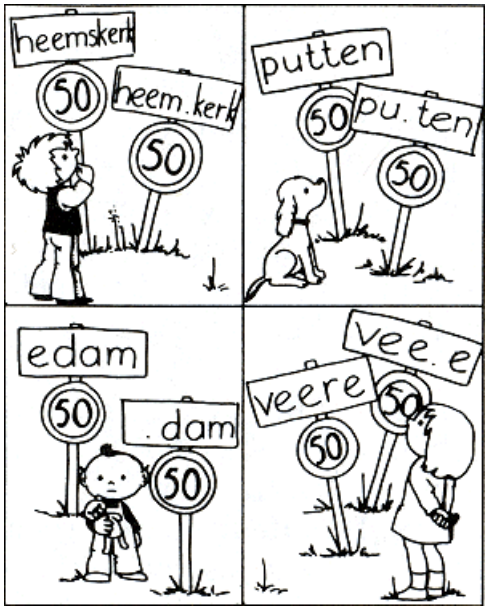
Ook hier weer enkele voorbeelden (figuur 1.5 t/m 1.8).

Laat ik het hier bij laten en niet nog eens op taalbeheersing via vocabulaireverrijking en cognitieve ontwikkeling via begripsverwerving ingaan. Dat is van hetzelfde laken een pak als bij de eerder besproken methoden. Met dit werkplan worden meetbare successen behaald. Het is de vraag ten koste waarvan dat gebeurt.

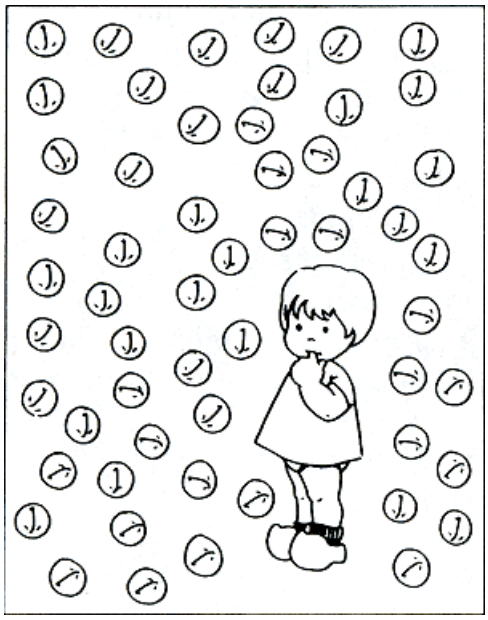
Tot zover de kritiek op verschillende methoden voor het kleuteronderwijs.



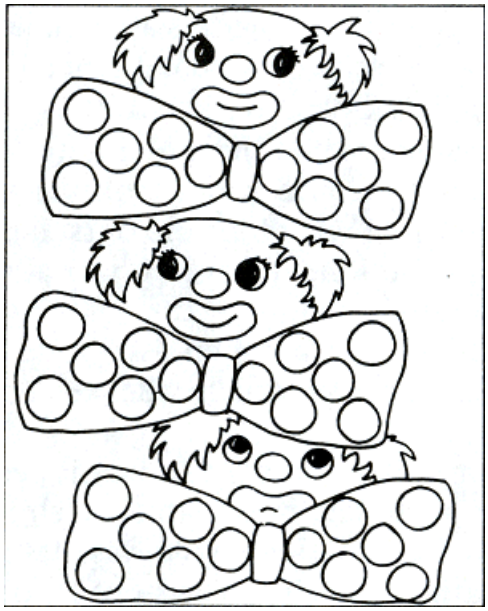
figuur 1.5
Voor iedere letter uit het woord is een appel getekend bij de bovenste twee plaatjes. Teken bij de andere plaatjes net zoveel appels in de boom als er letters in het woord onder het plaatje staan.



figuur 1.6
Welke letter ontbreekt er aan de plaatsnaam? Schrijf hem er bij.



figuur 1.7
De gevallen portemonnee.
Anneke moest voor haar moeder boodschappen doen. Juist toen ze bij de winkels kwam, viel haar portemonnee op de grond en alle centen vielen eruit. Anneke moest heel veel boodschappen doen en daarom had ze veel geld bij zich. Doen jullie voor elke boodschap die Anneke moest doen vier centen in een nieuwe portemonnee. *Kunnen jullie nu misschien zeggen hoeveel boodschappen Anneke moest doen*?



figuur 1.8
Kleur van de bovenste clown rechts 3 stippen en links 2 stippen.
Kleur van de middelste clown rechts 2 stippen meer dan bij de bovenste clown rechts en links evenveel als rechts.
Kleur van de onderste clown rechts 1 stip minder dan bij de middelste clown en links nog 1 minder.

Nu iets dat ik steeds heb uitgesteld, omdat het zo'n lastig geval is: een theoretisch werk, het boekje *Schoolrijp maken* van Pieter Langedijk[1]. Het valt me moeilijk, het doet me echt pijn, er iets kwaads over te zeggen. Immers, het boekje straalt een beminnelijke, hartroerende, ontwapenende naïviteit uit, zoals die zelden op je afkomt. De auteur meent het echt en hij bedoelt het zo goed. Moet ik werkelijk op elke slak zout leggen? Moet ik al die onzin die erin staat, tegenspreken? Neen, zelfs als ik het zou willen, zou ik het niet eens kunnen. Wel vraag ik me telkens af: waar haalt de auteur het vandaan? Bronnen worden niet vermeld. Heeft hij het van horen zeggen, of is het derde- of vierdehands gedrukte informatie? De auteur gelooft er in elk geval in.

De naïviteit begint met de titel, die open en eerlijk zegt waar het om gaat: schoolrijp maken. Bananen en tomaten worden wel onrijp geëxporteerd; voor ze bij de klant komen, ondergaan ze een proces van rijpmaking, een klaarstomen. De auteur windt er geen doekjes om: je maakt kinderen schoolrijp, zoals je fruit consumptierijp, varkens slachtrijp en terrein bouwrijp maakt. De middelen die je daarbij hanteert, zijn niet nieuw; intelligentietoetsen, vocabulairelijsten en begripscategorieën. En hoever de rijping gevorderd is, kan de juffrouw of de moeder op elk ogenblik nagaan met behulp van een schraplijst van ongeveer 700 items, die op het eind van het boek geplaatst is. Dat moet liefst geregeld gebeuren want je moet die vragen en toetsen niet maar één keer doornemen: '... herhalen is noodzakelijk. Onderzoekingen hebben aangetoond, dat je na één dag meer dan de helft (70%) vergeten bent. Als je iets één keer herhaalt, ben je na één dag 40% vergeten en als je iets twee keer herhaalt, ben je na één dag 10-20% vergeten. Hieruit blijkt dat herhalen erg belangrijk is. Hoe meer zintuigen je inschakelt, hoe beter je het blijft onthouden.' (pag. 20.)

Waar haal je zoiets vandaan? En die vraag stel je je telkens weer.

'De meeste mensen weten ook niets van de meest eenvoudige ziekten af. Ze weten niet waardoor die ontstaan en hoe je er af kunt komen. In China weten kleine kinderen van 6 jaar al wat je aan bepaalde veel voorkomende ziekten kunt doen.

Door dit gebrek aan kennis zijn de mensen volkomen afhankelijk van de artsen en zijn ze verplicht alles te "slikken".' (pag. 85.)

Of:

'Ik hoorde het verhaal van een jongen van 19 jaar, die in vrij korte tijd 20 cm gegroeid was, maar van zichzelf nog steeds dacht dat hij die kleine jongen van 14 was. Het gevolg was, dat hij op de trap te grote stappen maakte, regelmatig struikelde, zijn hoofd stootte als hij onder een deur door moest en de bochten niet goed nam. Toen hij na een ernstig ongeluk ineens tot de schokkende ontdekking kwam dat hij een "grote" jongen was, accepteerde hij zijn lichaam zoals dat nu was. Vanaf dat moment maakte hij geen brokken meer.' (pag. 88.)

Of:

1 P. Langedijk, *Schoolrijp maken*, Deventer, 1978.

‘Ritmegevoel

Theorie

Veel kinderen hebben een slecht gevoel voor ritme. Kinderen, die een slecht gevoel voor ritme hebben blijken vaak slecht in rekenen te zijn. Kinderen, die geen melodie kunnen zingen, hebben over het algemeen een slecht taalgevoel. Door het oefenen van het ritme zal het rekenen waarschijnlijk ook minder moeilijkheden opleveren.’ (pag. 95.)

Het is de enige plaats waar ik in dit boek het woord ‘theorie’ ben tegengekomen. Wat wordt ermee gesuggereerd? Dat het echt waar is? Of dat het in de praktijk heel anders is? Waar komt deze onzin vandaan? De naïviteit van de auteur neemt soms gevaarlijke vormen aan:

‘In Amerika hield een psycholoog een lezing over deze onderwerpen en vroeg de luisteraars of er ouders bij waren, die van nu af aan zoveel mogelijk wilden proberen op alle vragen van het kind een antwoord te geven en niet te zeggen dat ze geen tijd hebben of “dat krijg je later op school wel te horen” of “daar ben je nog te klein voor” of nog erger “lig niet te zanikken, hou je mond toch eens dicht, ik word er gek van, laat me met rust”. Er gaven zich 20 ouders op voor een experiment. Zij probeerden zoveel mogelijk vragen te beantwoorden, natuurlijk wel op kinderlijk niveau. De ouders merkten snel dat ze veel dingen zelf ook niet wisten en gingen op hun beurt in allerlei boeken snuffelen, kochten woordenboeken, naslagwerken, encyclopedieën. Het was voor hen net zo leerzaam. Vrijwel al hun kinderen bleken met drie jaar te kunnen lezen en de meesten konden met hun derde jaar zelfs al iets in een encyclopedie opzoeken en konden zelfs al schrijven (of typen). Met hun vijfde jaar hadden velen al een niveau van een 10-jarig kind bereikt.’ (pag. 114-115.)

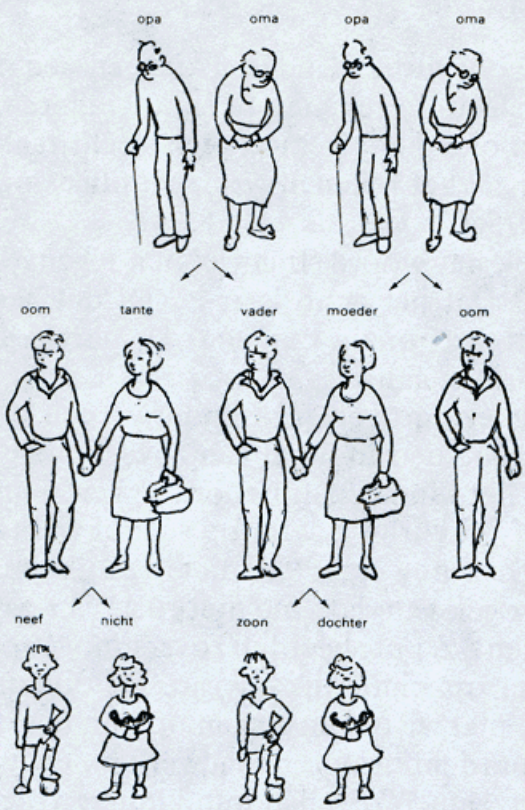
Er bestaan in Amerika inderdaad handleidingen om van je kind een genie te maken.

Ik wil met deze voorbeelden niet de indruk wekken dat dit boek alleen maar uit onzin bestaat. Integendeel, het is overwegend zinnig en er staat veel in dat waard is door ouders en leidsters behartigd te worden. Het is veeleer de manier waaróp het gezegd wordt, de context waarin, de voorbeelden die het betoog kracht moeten bijzetten, en vooral het gemak waarmee de auteur over alles heen praat en middelen van schoolrijp-maken aanprijst in de stijl van de televisiereclame. Op sommigen komt zoiets averechts over, op de meerderheid blijkbaar niet. Hoe zijn de lezers van dit boekje in dit opzicht gedistribueerd? Hoeveel zijn er onder die over gebrek aan logica - zoals bijvoorbeeld in het generatieschema (figuur 1.9) - struikelen? (pag. 134.)

Hoe profiteer je van scorelijsten om je kind schoolrijp te maken? Door hem de items waar hij negatief op is, over te laten doen? Wat doe je met de scorelijst ‘Menstekening’ (pag. 97-100)? (zie figuur 1.10.)

Geweldig! Ik mis er alleen in of er een punt bijkomt dan wel afgaat voor een piemel. Maar geen gekheid! De auteur bekent, dat je met de puntentelling voorzichtig moet zijn, maar hij beveelt toch maar aan op grond van die lijst het tekenen extra te oefenen.

In het taalkundige en cognitieve vlak betekent schoolrijp maken voor de



Generatieschema (pag. 134.)

Menstekening

Voor een klein kind is het meest opvallende aan een ander mens, zijn gezicht. Als een baby in de wieg ligt, ziet deze meestal het gezicht van moeder of vader en daar let hij ook op, misschien omdat ergens uit dat gezicht ook geluid komt (praten) wat de aandacht trekt. Jonge kinderen tekenen alleen het hoofd met een paar armen en benen daaraan, een soort aardappel met wat sprieten eraan (kop-poteling). Later tekenen ze er ook een romp bij, maar die is dan meestal kleiner dan het hoofd. Ze zien ook nog niet dat een mens vijf vingers heeft en dat de duim aan de zijkant van de hand zit.

Naarmate het kind ouder wordt, gaat het meer op details letten en ziet het dat het hoofd kleiner is dan de romp. Aan de hand van de menstekening kan de opvoeder ongeveer zien hoever het kind in zijn ontwikkeling is. Hieronder laten we zien, hoe je de menstekening om kunt zetten in een aantal punten, aan de hand waarvan men ongeveer het ontwikkelingsniveau van het kind kan taxeren.

Laat het kind een mens tekenen en zet het aantal punten om in jaren en maanden (zie lijstje). 11 punten komt overeen met 5 jaar en 3 maanden. Als de werkelijke leeftijd van het kind 6 jaar en 2 maanden is, kan men zien dat het een jaar achterloopt. Na het doen van de hierna volgende oefeningen kan men het kind weer een mens laten tekenen en kan men nagaan of de tekening 'beter' is.

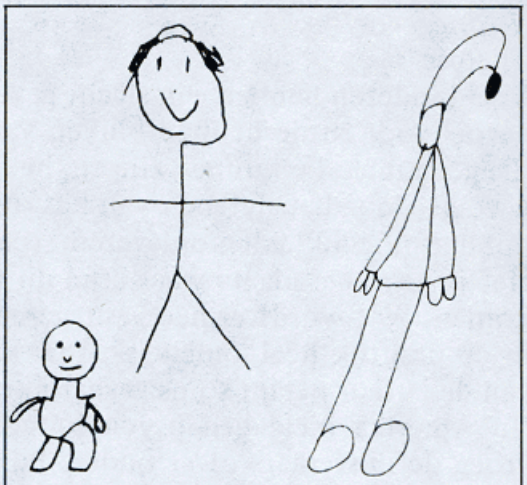
We moeten met deze puntentelling wel vrij voorzichtig zijn, er dus een beperkte waarde aan hechten.

Relatie aantal punten en leeftijd.

Elke punt meer telt voor 3 maanden, uitgaande van 3 jaar met 2 punten.

3 jaar 2 punten	8 jaar 22 punten
4 jaar 6 punten	9 jaar 26 punten
5 jaar 10 punten	10 jaar 30 punten
6 jaar 14 punten	11 jaar 34 punten
7 jaar 18 punten	12 jaar 38 punten

figuur 1.9



Scoring van de menstekening

hoofd		1 punt
	- afmeting van het hoofd tussen 1/10 en 1/2 van de romp	1 punt extra
ogen		1 punt
	- wenkbrauwen	1 punt extra
	- pupillen	1 punt extra
	- wimpers	1 punt extra
	- lengte van het oog groter dan de breedte	1 punt extra
	- als het hoofd en profil getekend is en de blikrichting is aangegeven	1 punt extra
neus	- 1 lijntje	1 punt
	- 2 lijntjes	1 punt extra
	- neusgaten	1 punt extra
mond	- 1 lijntje	1 punt
	- 2 lijntjes	1 punt extra
	- tanden	1 punt extra
voorhoofd en *kin* aangegeven.		1 punt extra
	- kin duidelijk gescheiden van de onderlip	1 punt extra
oren		1 punt
	- afmeting juist	1 punt extra
haren	- alleen golflijntje	1 punt
	- vrij gedetailleerd getekend	1 punt extra
hals	- 1 lijn	1 punt
	- 2 lijnen	1 punt extra
romp	- een of twee lijnen	1 punt
	- de lengte langer dan de breedte	1 punt extra
	- schouders duidelijk aangegeven	1 punt extra
armen	- zomaar ergens bevestigd	1 punt
	- op de juiste plaats bevestigd	1 punt extra
	- pols en ellebogen getekend	1 punt extra
	- lengte van de arm niet langer dan tot aan de knieën	1 punt extra
handen	- handpalm duidelijk onderscheiden van arm en vingers	1 punt extra
vingers	- ongeacht aantal (3 of 10 vingers)	1 punt
	- precies 5	1 punt
	- verhouding lengte en breedte van de vingers juist	1 punt extra
	- *duim* duidelijk aangegeven	1 punt extra
benen	- 1 lijn	1 punt
	- 2 lijnen	1 punt extra
	- enkels of knieën aangegeven	1 punt extra
	- lengte van de benen tussen een- of tweemaal die van de romp	1 punt extra
voeten		1 punt
	- lengte groter dan de hoogte van de voet	1 punt extra
	- lengte van de voet tussen 1/3 en 1/10 van de lengte van het been	1 punt extra
hiel	- duidelijk aangegeven	1 punt
kleren	- een aanduiding van knopen of een hoed	1 punt
	- twee ondoorzichtige kledingstukken	1 punt extra
	- volledig ondoorzichtige kleding	1 punt extra
	- *vier* duidelijk te onderscheiden kleren	1 punt extra
	- uniform of vakkleding	1 punt extra
	- *en profil* met een fout	1 punt extra
	- zonder fouten	1 punt extra
leeftijd:	*totaal* aantal punten	

figuur 1.10

auteur: bijdragen van vocabulaire en overdracht van begrippen. Ik heb me er in de eerste helft van dit artikel al te uitvoerig mee beziggehouden om er nu weer op terug te komen. De lijsten woorden en begrippen zijn hier heel wat uitvoeriger dan die aan de eerder besproken werkplannen ten grondslag liggen. Ze lijken zó overtuigend - inderdaad, die moet een kind kennen of weten - dat de onvoorbereide lezer zich niet de droevige schraalheid van deze ogenschijnlijke rijkdom realiseert. Dit is dan het grote gevaar dat het kleuteronderwijs bedreigt van de kant van zulke aimabele boekjes. Zullen ouders en leidsters ertegen zijn opgewassen?

Zoveel kritiek heeft alleen zin als ze een weg wijst, een weg de andere kant op. Maar welke kant moeten we niet op?

Ten eerste de kwestie van werkbladen en werkboekjes; een op zich goed didactisch idee. Maar let op de leeftijd! Voor kleuter- en aanvankelijk lager onderwijs houden werkbladen en werkboekjes ernstige beperkingen in, die een gevaar kunnen betekenen. Of veeleer drie gevaren:

- het - noodzakelijk - ontbreken van de verbale component;
- het - noodzakelijk - ontbreken van de derde dimensie;
- de beperking van de eigen activiteit van de leerling.

In het kleuter- en aanvankelijk lager onderwijs ziet men zich uiteraard beperkt tot de *niet-verbale* vorm van werkblad en werkboekje; realiseert men zich dit niet goed, dan kan men met dit type leermiddel onheil stichten. Pas met het klimmen der jaren kan men verbale communicatie in werkbladen en werkboekjes introduceren, in telkens intensievere mate en meer verfijnde vorm. Dan pas kunnen werkbladen en werkboekjes een autonoom of het onderwijs overheersend leermiddel worden. Te vroeg toegepast, onjuist opgezet en onjuist in het onderwijs gebruikt kunnen ze onheil stichten door de verbale communicatie en de oefening in taalbeheersing te beperken. Het is een feit dat men met puur pictorale werkbladen en werkboekjes heel wat opdrachten kan verstrekken die geen of slechts geringe begeleiding door de onderwijzende vereisen, en dat men er in het bijzonder ook doeltreffend toetsen mee kan afnemen. In de constructie van dit soort materiaal is een geweldige techniek ontwikkeld; speciaal ook in het vervaardigen van toetsen. Producenten van werkbladen en werkboekjes trachten het steeds beter te doen, willen liefst zichzelf overtreffen. Men spant zich in om door middel van de niet-verbale werkbladen en werkboekjes ook niet méér over te brengen dan hetgeen pictoraal mogelijk is; een steeds verdergaande eliminatie van de verbale component en steeds minder gelegenheid tot verbale communicatie en oefening in taalbeheersing. Natuurlijk zou dit niet hoeven. Men kan zich ook niet-verbaal materiaal voorstellen - het bestaat trouwens -, dat door zijn aard en zijn plaatsing in het onderwijs juist gelegenheid geeft tot verbale communicatie - mondeling en schriftelijk - en tot oefening in taalbeheersing. Jammer genoeg is zulk materiaal zeldzaam, vermoedelijk omdat auteurs van niet-verbaal materiaal er trots op zijn het verbale element te kunnen elimineren en niet doorgedacht hebben over de problemen, die ze hierdoor scheppen. Ik wil het materiaal dat in deze zin bewust het verbale element elimineert, *antiverbaal* noemen.

In de niet-verbale werkbladen en werkboekjes is het verbale element door het pictorale verdrongen. En dit pictorale wordt dan nog tot de twee dimensies van het papier vernauwd. Weergave in perspectief is op jonge leeftijd, maar zelfs nog veel later, een ontoereikend surrogaat voor de derde dimensie. Men staat er versteld van dat ontwerpers van werkbladen zich zelfs niet het verschil realiseren tussen voor-en-achter, boven-en-beneden op papier en in de echte ruimte. Jonge kinderen worden geacht de door jarenlange ervaring bezegelde conventies van volwassenen in deze te kunnen aanvaarden.

Werkbladen en werkboekjes als systeem beknotten het - fysisch en mentaal - bezig zijn van jonge kinderen op onverantwoorde wijze. Het zich moeten concentreren op dit materiaal, hoe goed ook opgezet en hoe welkom ook om 'de orde te handhaven', behelst een ernstige reductie van de eigen activiteit van het kind.

Dit zijn ernstige tekorten. Kun je ze opheffen door *naast* het in antiverbale werkbladen en werkboekjes pictoraal realiseerbare het andere, dat onmisbaar is, apart te beoefenen? Het kan, maar zoiets is een kwalijke scheiding. Er komt nog iets anders bij. Een zeker aantal van dit soort werkbladen zou geen kwaad kunnen, ware het niet dat het niet bij een 'aantal' blijft, maar dat het meteen tot een systeem uitgroeit. De antiverbale werkbladen of werkboekjes vormen het materiaal dat aan het kind wordt verstrekt en dat daardoor de kern van het onderwijs dreigt te worden, het middelpunt waar al het andere zich omheen groepeert: vocabulaire- en begripsbeoefening en misschien zelfs nog de niet-cognitieve activiteiten. De armoe van dit soort werkbladen en werkboekjes wordt er niet minder door als je er tierelantijnen omheen laat bengelen. Het is en het blijft armoede. *Ten tweede*, het onderwijs in de gedaante van toetsen betekent dat je één ding moet aanstrepen, iets precies zo moet natekenen, precies zo kleuren, precies zo aanvullen. Het is een groot gemak voor wie het na moet zien, dat er maar één oplossing mogelijk is. Maar moet je de kleuter echt al africhten op die tweedeling 'goed of fout'? Terwijl vernieuwers - vooral ook in de wiskunde - het als hun voornaamste taak beschouwen deze schoolse attitude te bestrijden bij onderwijzenden en onderwezenen, wil men dit zwart-wit van 'goed of fout' al aan kleuters en hun leidsters opdringen. 'Zo moet het van de meester' is het op school; 'zo moet het van de baas' is het later. Moet het nu ook al 'zo moet het van de juffrouw' worden op de kleuterschool? Ze vragen erom, hoor ik iemand zeggen, maar sta je dan alles toe waar ze om vragen?

Ten derde de atomisering, die nauw samenhangt met 'werkbladen' en 'toetsvorm'. Het is op zijn minst al didactisch fout: 'van de hak op de tak' en 'als los zand' zeggen we van iets dat een mens heeft geleerd of heeft moeten leren zonder het te integreren. Was het hem ook zo aangeboden, verbrokkeld en ongeïntegreerd? Niet door de natuur of door het milieu, maar vrijwel zeker door de school. Er is geen twijfel aan of een mens moet ook leren analyseren, leren indelen en opdelen. Maar het cognitieve leven begint niet met opgedeeld materiaal. De wereld van de kleuters is geïntegreerd.

Ten vierde, taalverrijking door het aanleren van vocabulaire, cognitieve ont-

wikkeling door verwerving van begrippen. Ik vrees dat de kleuterleidsters tegenwoordig met deze ideeën geïndoctrineerd worden; het is immers de grote mode in psychologie en pedagogiek. Door iets met schotjes en in laatjes te verdelen kun je het wetenschappelijk benaderen, tenminste dat denken sommigen. Het is integendeel een dringende vereiste, dat ouders en leidsters leren begrijpen dat taal niet een collectie van woordjes en kennis niet een collectie van begrippen is. Taal is gestructureerd en als iemand niet uit zijn woorden kan komen, is het niet omdat hij er te weinig van heeft - dat is altijd te verhelpen - maar omdat hij geen zinnen en reeksen van zinnen kan vormen, omdat hem de structurele middelen ontbreken om zich van zijn woordenschat te bedienen. Kennis is geen begrippenlijst, zoals een plaatjesboek of een naslagwerk, maar een geordend, samenhangend systeem van inzichten.

Ten vijfde, het isoleren van de wiskunde - of welk cognitief gebied dan ook - uit het geheel van opvoeding en onderwijs, om als apart vak te worden onderwezen, moet dit al bij de kleuter beginnen? Het af- en opsplitsen van vakken en vakjes - taal, tekenen, gymnastiek en wat dies meer zij - is uiteindelijk onvermijdelijk, maar welk zinnig argument is er voor aan te voeren om het te vervroegen? Het is een uitvloeisel van dezelfde mentaliteit als die die leidt tot wat ik ‘atomiseren’ heb genoemd: de air van wetenschappelijkheid die om het indelen en verdelen hangt.

Vijf punten om aan te geven welke kant het *niet* op moet met het kleuteronderwijs. Wordt het positieve hierdoor ondubbelzinnig bepaald? Gelukkig niet, je kunt ook dan nog vele kanten op. Maar de richting van het betoog blijkt toch enigszins bepaald, omdat het doel ‘onderwijsontwikkeling’ is. Je wilt onderwijs ontwikkelen dat door anderen wordt gegeven, hetgeen betekent dat je de voorwaarden moet scheppen om die anderen daartoe in staat te stellen. Hoe materialiseer je deze voorwaarden als het niet met etalageplaatjes, antiverbale werkbladen en werkboekjes, vocabulaire- en begrippenlijsten mag geschieden? Ik denk dat je moet beginnen je met de natuurlijke - individuele en sociale - activiteiten van de kleuter vertrouwd te maken en dat je je - impliciete of expliciete - doelstellingen in eerste instantie binnen het raam van deze activiteiten moet trachten te realiseren. Wat de cognitieve en speciaal de wiskundige vorming aangaat, betekent dit dat je in de gewone activiteiten van de kleuter de cognitieve elementen en de aanzetten hiertoe moet trachten te achterhalen. Dit is niet gemakkelijk en wel omdat we uit de visie van de volwassene dit cognitieve en vooral het wiskundige te hoog of in een onjuiste richting zoeken. ‘Hij kan al tellen’ lijkt een belangrijke verworvenheid van cognitieve aard, omdat het zo'n opvallend verschijnsel is. Het eist door zijn verbaal karakter aandacht op, die vermoedelijk ten koste gaat van andere cognitief wellicht belangrijker verschijnselen die niet noodzakelijk verbaal uitgedrukt worden. Ik bedoel onder meer de niet-verbale kennis van wat ik ‘elementaire structuren’ heb genoemd[1], veelal van topografische aard:

1 H. Freudenthal, *Didactische fenomenologie* (hoofdstuk 3.12 en hoofdstuk 10). Interne publikatie IOWO. Te verschijnen bij Vakgroep OW & OC.

de *structuur der opeenvolging* of *file*, het naast of achter elkaar plaatsen van objecten, bijvoorbeeld om 'treinen' te maken waarmee gereden wordt, het op elkaar plaatsen van blokken, eventueel volgens grootte. Of hetzelfde in het ritmisch-akoestische of ritmisch-gymnastische, eventueel met elkaar en met files van harde voorwerpen gecombineerd. Het vroegtijdig zinloos tellen - ook in verkeerde volgorde - hoort hierbij. Uit een gegeven file een nieuwe scheppen door regulier overslaan (bijvoorbeeld in een tegelpatroon één of twee tegels overspringen) is een verfijnd systeem van structureren, evenzo het regelmatig inlassen in een gegeven file van nieuwe elementen. Door een file van periodiciteiten te voorzien (in kralensnoeren regelmatig grote en kleinere laten afwisselen) maakt men uit een file een *herhalingsstructuur*. Deze structuren zijn echter niet alleen lineair, maar ook in vlak en ruimte te ontwikkelen; een potentiële oneindigheid in verschillende richtingen.

Verwant aan de herhalingsstructuur is de *kringstructuur*, het cyclisch rangschikken van objecten, van personen rond een tafel of een middelpunt; als mentale structuren de dagcyclus, de weekcyclus, de jaarcyclus.

Andere topologische structuren zijn de *omwegstructuur* (het kind loopt een omweggetje om op het eind de geleider weer te ontmoeten), de *randstructuur* (op randjes lopen), de *insluitstructuur* (een echte of symbolische insluiting van zichzelf of een ander door middel van getekende of anderszins gemarkeerde omsluiting), de *slagboomstructuur* (het wegversperren met uitgestrekte armen), de *verstoppertjesstructuur*, de *om-de-hoek-kijk-structuur, doolhofstructuren*.

Deze lijst van algemene structuren zou willekeurig kunnen worden voortgezet en aangevuld met meer gespecialiseerde: de *blokkendoos* die niet op een willekeurige manier kan worden ingepakt; de *puzzel*, die op een bepaalde manier moet worden samengesteld; het *gezin* in het algemeen en in zijn diverse realiseringen, gestructureerd naar generaties, geslachten en verwantschap; de inhoud van een *speelgoedkast*, enzovoort.

En om de metrische structuren niet te vergeten: de klimboom en het klimrek, de weg of wegen zoeken in het onregelmatige en in het regelmatige, beperkt door de lengte van je arm, van je pas, van je klim, door hoe je je in bochten kunt wringen, door de hulp die je krijgt of niet krijgt, maar ook door het materiaal, zijn sterkte, schuinte, gladheid. Zijn klimbomen en klimrekken er alleen maar voor lichamelijke oefening? Wie een keer klimmende kinderen elkaar aanwijzingen heeft horen geven of met hen over hun klimmen heeft gepraat, weet hoeveel ongeverbaliseerde cognitie daar op verbalisering wacht. En wie die ervaring niet heeft opgedaan, probere het eens, echt of in een gedachtenexperiment.

Bij vele van deze structuren kan men stadia onderscheiden van passief herkennen, actief gebruiken, namaken, maken, ervan weten en - al dan niet verbaal - kunnen beschrijven. Ik heb ze niet opgesomd als grondstof voor onderwijsontwikkeling, maar om te beklemtonen dat cognitieve verschijnselen zich kunnen openbaren in velerlei activiteiten van het kind tot hetlopen, springen, klimmen, dansen, bouwen, toe. Deze natuurlijke geïntegreerdheid van het cognitieve in de totale activiteit beschouw ik als uitgangs-

punt. Uiteraard wordt er in de loop van de ontwikkeling veel uit losgemaakt, door bewustmaking en verbalisering. Dit is een proces dat zeer zeker ook bevorderd moet worden, maar het bewustgemaakte en geverbaliseerde zal op kleuterleeftijd *niet het uitgangspunt* en de bewustmaking en verbalisering zal *niet geforceerd* mogen zijn.

Ik zal niet trachten ze te classificeren, al die natuurlijke activiteiten van een kleuter: het waarnemen met je zintuigen, het verplaatsen van jezelf of delen van jezelf of van het waargenomene om beter te kunnen waarnemen, het reageren op en het interpreteren van waarnemingen, het laten en doen waarnemen door een ander en het beïnvloeden van zijn waarnemingen, het spelen met de dingen om iets te maken, te veranderen, te vernielen, het spelen met je eigen lichaam en met dat van anderen, het communiceren met de ander en het provoceren van acties van de ander, het is te veel om op te sommen. Waar het me in mijn voorbeelden van daarstraks op aankwam, zijn de cognitieve, zelfs wiskundige, structuren in dit soort activiteiten, structuren die de moeite waard zijn om te worden ontdekt, door het kind dat ze schept en door de volwassene die het kind ertoe kan brengen ze zich bewust te worden.

Wat kan de onderwijsontwikkelaar hiertoe bijdragen?

Allereerst kan hij contexten scheppen waarin deze activiteiten zich kunnen ontplooien, liefst rijke contexten met veel ontplooiingsmogelijkheden. Maar dit is niet alles. De ontwikkelaar moet deze contexten beproefd en hun mogelijkheden gepeild hebben en wel tot een zodanige diepte dat hij er ook de cognitieve, speciaal de wiskundige, elementen in kan identificeren. Niet om ze eruit te lichten en ze in ‘Reinkultur’ gekweekt en dan gebundeld de rijke context te laten vervangen, maar om attent te maken op wat de rijke context te bieden heeft, om de leidster, die ervan gebruik maakt, te laten zien waar ze op kan, mag, moet letten, wat ze zichzelf en de kinderen bewust zou kunnen maken, wat de moeite loont om te verbaliseren of te laten verbaliseren.

Dus als alternatief materiaal voor de kleuterschool: een rijke context - zintuigelijke, werktuigelijke, lichamelijke of verbeelde actie - geïllustreerd met ervaringen en verdiept door analyses van waar je op moet letten, van wat je ermee kunt nastreven en bereiken.

Terug- en vooruitblik

Het was vijf jaar geleden toen ik tot mijn schrik zag wat er op de markt van het kleuteronderwijs te koop was. Ik schreef dit opstel ter bescherming van kleuters en ter waarschuwing van leidsters en opleid(st)ers. Ik stipte vijf punten van aandacht en aanklacht aan. Inmiddels is er nieuws op de markt verschenen. Ga in het oude en nieuwe na wat door mijn vijf punten wordt geraakt. Ik heb ook positieve denkbeelden ontvouwd. Ga na wat er inmiddels van gerealiseerd is en hoe.

Ga ook na wat eruit resulteert voor het verband tussen moedertaal en wiskundetaal bij de kleuter, mede als voorbereiding op het volgende opstel waar dit verband op hoger niveau en vanuit een hoger standpunt wordt bezien.

2. Moedertaal en wiskundetaal

1, 2, 3, ... - hoort dit tot de moedertaal of tot de wiskundetaal? Hardop gelezen is het Nederlands, maar voor een Franstalige, een Engelstalige, een Duitstalige zou het Frans, Engels, Duits klinken.

Het kind leert de getallenrij (althans een beginstuk ervan) en meestal ook simpele sommetjes in 't kader van zijn moedertaal, d.w.z. niet anders dan woorden als ‘tafel’ en zinnen als ‘doe de deur dicht’. Toch vertoont de getallenrij al vroeg de neiging een eigen leven binnen de moedertaal te leiden. Op zeker ogenblik - meestal bij de overstap naar de ‘grote school’ - wordt de navelstreng doorgesneden tussen moedertaal en wiskundetaal. De wiskundetaal is ‘geboren’, maar dat betekent niet dat de boreling het zomaar zonder de moeder kan stellen. De afhankelijkheid blijft voortduren - trouwens een wederzijdse afhankelijkheid.

De telrij is in alle talen - voor zover mij bekend - een buitenbeentje. De telwoorden doen zich als bijvoeglijke naamwoorden voor, worden in sommige talen ook als zodanig geflecteerd. In ‘rode knikkers’ zegt ‘rood’ iets over elke afzonderlijke knikker - de knikker is rood. In ‘vijf knikkers’ is de vijf geen eigenschap van de afzonderlijke knikker - ‘de knikker is vijf’ kan niet - maar van een verzameling knikkers. Jonge kinderen hebben er moeite mee: ze moeten nog leren waar de vijf op slaat. Een bekend verschijnsel: op de vraag ‘hoeveel knikkers?’ gaan ze ‘tellen’ en op de hernieuwde vraag hoevéél het er dan zijn, tellen ze opnieuw. Pas door ‘resultatief’ te tellen, tonen ze aan te hebben begrepen waar de ‘vijf’ een eigenschap van is.

De telrij is een buitenbeentje. Bij ieder getal hoort een volgende en zodra je het systeem door hebt kun je zelf bij elk getal zijn opvolger construeren. Van dingen die je anders tegenkomt, van wat er om je heen gebeurt, moet je telkens weer opnieuw de naam leren - een woord of een hele volzin. In het begin althans, geleidelijk leer je je wel zelf te redden door verbanden te leggen. Maar die verbanden zijn zwak, de constructiemiddelen onzeker en onregelmatig. De getallen laten zich, van een beginstuk afgezien, met regelmatig te construeren namen oproepen, en de onregelmatigheden in de gesproken taal vervallen geheel en al in schrift en druk. De getallen vormen een vocabulaire dat je zelf kunt aanmaken en uitbreiden.

Met de schriftelijke codering zet een proces van ‘formaliseren’ in - in de rekenles meteen veel indringender en gestroomlijnder dan in de moedertaalles. De ‘natuurlijke’ talen zijn maar zwakjes geformaliseerd. De taal van de telrij is zowat de eenvoudigste geheel geformaliseerde taal. De regels zijn verbluffend eenvoudig: bij een geschreven getal vind je het volgende door naar het meest rechtse cijfer te kijken en het volgens het recept

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9$$

te vervangen of als het een 9 mocht zijn de hele rits negens waarvan het deel uitmaakt door nullen te vervangen en op de eerste niet-negen (eventueel een slapende 0) de vorige regel toepassen.

Zo gaat het verder in de rekentaal: een vocabulaire dat wetmatig gecon-

strueerd is en bewerkingen die met eenvoudige regels beschreven zijn en die je als je ze door hebt, kunt uitvoeren zonder er iets van te begrijpen. Algoritmen noem je zoiets ook: algoritmen voor het cijferen, voor percenten, voor breuken, voor negatieve getallen, voor machten, voor logaritmen enzovoort. Wat mag wordt door syntactische regels vastgelegd, zonder beroep op enige betekenis, die voor formele talen trouwens niet eens vereist is. Ook natuurlijke talen kennen formele regels. ‘Hij zijn een meisje’ mag niet in het Nederlands om formele redenen. ‘Hij is een meisje’ klinkt gek, maar je kunt je situaties voorstellen waar het niet alleen correct Nederlands maar zelfs inhoudelijk zinvol is.

De natuurlijke talen kennen regels, bij elkaar te veel en te vaag om op te noemen - je begrijpt nauwelijks hoe een kind die in luttele jaren onder de knie krijgt. De regels van de wiskundetaal zijn hierbij vergeleken klein van aantal maar het ‘zuiver spreken’ van die taal kost de meesten, zo niet allen, meer tijd en moeite dan bij de moedertaal het geval is. Dit geeft te denken. Formele talen - vocabulaire, syntax, algoritmen - kunnen als je ze beheerst, onberispelijk functioneren, vooral als het een computer is die je met zo'n taal programmeert. Maar mensen, en zeker ook kinderen, zijn geen computers; ze hebben heel andere functies dan alleen die van geprogrammeerd te kunnen worden, en daar komen dan de moeilijkheden vandaan die ze op de duur met de wiskundetaal kunnen krijgen.

Taal is geen doel in zichzelf. Je spreekt en schrijft omdat je iets te zeggen hebt. Woorden en zinnen betekenen iets en worden dank zij en samen met hun betekenissen in leerprocessen verworven en waar het te pas komt toegepast. Natuurlijk kun je ook taaluitingen zonder betekenis van buiten leren, maar het kost veel meer moeite, het beklijft niet en je hebt er niets aan. Een formele taal kun je los van elke betekenis hanteren als je hem eens een keer goed hebt geleerd en gememoriseerd. Dat lukt uitstekend met zo'n eenvoudige formele taal als de getallenrij. Cijferen is al ingewikkelder, bij de breuken lukt het maar zowat de helft van de leerlingen en bij de algebra valt er weer zo'n helft, zo niet meer, af.

Taal is geen doel in zichzelf - zei ik. Om geleerd te worden moet taal zinvol zijn, zinvol als middel om met anderen en zichzelf te communiceren. Losse taaluitingen, holle kreten, zijn niet zinvol. Tekst vraagt om context. Met ‘drie knikkers en er nog twee bij’ wordt 3 + 2 = 5 een zinvolle taaluiting, tenminste als je ooit het winnen en verliezen van knikkers als zinvolle bezigheid hebt ervaren. Met 25 kg schouderham en er nog 13 kg bijbestellen ben je net op het randje van het zinvolle en in een zwembad van 50 m lang, 20 m breed en 5 m diep kun je letterlijk maar ook overdrachtelijk verdrinken. Maar zelfs daar blijft het niet bij. Hoe hoger de leerling op de schoolladder klimt, des te meer verschraalt de wiskunde tot een taaltje dat nergens voor schijnt te dienen dan nog hoger op te mogen klimmen. Wie de klim lukt, loopt de kans van de wiskunde niet meer dan een taaltje te hebben geleerd dat nergens toe dient dan - als de gelegenheid zich voordoet - aan een nieuwe generatie te worden onderwezen.

Geen opwekkend beeld, maar dan ook overdreven zwart geschilderd. Iedereen weet dat wiskunde een machtig werktuig in onze strijd om het bestaan

en begrip van de wereld is en voor velen veel meer dan een onbegrepen brabbeltaaltje zonder betekenis.

Wiskunde is meer dan taal. Of veeleer: de wiskunde bezit een taal, de wiskundetaal waarmee je wiskunde kunt mededelen aan anderen en aan jezelf. Echt wiskunde is de inhoud die je mededeelt; de taaluitingen betekenen iets. De wiskunde bemoeit zich bij voorkeur met inhouden die zich gemakkelijk laten schematiseren: hetgeen - van de winsten en verliezen bij het knikkeren tot het gedrag van kunstmanen toe - door spelregels van mens of natuur wordt beheerst. Omdat het schematiseerbaar is, is het mathematiseerbaar. Met het weer en de economie, waar zoveel onvoorziene factoren het schematiseren bemoeilijken, hebben we meer moeite en individueel menselijk gedrag is maar in heel vage schema's te vatten.

Gegeven en gevraagde inhouden worden door taalmiddelen medegedeeld, aanvoegend, vragend of bevelend. Hoe beter voor schematiseren vatbaar des te meer formeel kan de taal zijn waarin dit geschiedt. Dat is dan de kracht van de wiskunde: gemakkelijk schematiseerbare inhouden in wiskunde omzetten, door middel van een wiskundetaal die zo sterk geformaliseerd is dat je je er op lange trajecten in kunt bewegen zonder er zin aan te verbinden, om tenslotte de uitkomst terug te vertalen naar de inhouden toe waar het om gaat.

Een voorbeeld om te laten zien wat de wiskunde zich wel of niet kan permitteren.

Neem de volgende uitspraken:

In de bus zaten bejaarde dames en kinderen.
In de bus zaten bejaarde dames en heren.

Beide naar de vorm gelijksoortig, terwijl het inhoudelijk duidelijk is dat de eerste keer het bijvoeglijk naamwoord ‘bejaard’ alleen op het eerste zelfstandig naamwoord slaat terwijl het de tweede keer allebei betreft.

Nederlandse taal en wiskunde,
Nederlandse taal en letterkunde,

is een dergelijk geval.

Hardop gelezen zul je vermoedelijk een verschil in pauzes en intonaties opmerken, maar gedrukt lijken ze formeel hetzelfde en alleen via de inhoud kun je er een extra structuur in aanbrengen.

Zolang je in de sfeer blijft van de mondelinge communicatie kun je ook in de wiskunde met middelen zoals pauzes en intonaties volstaan om je bedoeling over te brengen:

vijf plus drie... maal zeven

is iets anders dan

vijf... plus drie maal zeven

- ik heb eigenaardigheden van uitspraak hier door stippeltjes trachten weer te geven, maar echt schriftelijk zou ik het in de vorm

(5 + 3) × 7 respectievelijk
5 + (3 × 7)

moeten doen (waarbij ik volgens ‘Meneer van Dalen wacht op antwoord’ het tweede paar haakjes ook mag weglaten).

Onder de verschillen tussen wiskundetaal en ‘natuurlijke’ talen vallen vooral de strikte interpunctieregels op. Ook de natuurlijke talen kennen interpuncties en interpunctieregels, maar die zijn dan veelal arbitrair en conventioneel en vooral in het Nederlands trek je je er niet erg veel van aan. In elk geval schieten ze wat structurerend vermogen betreft schromelijk te kort. In de voorbeelden die ik gaf werd de formele structuur door de inhoud gegarandeerd. Je leest en interpreteert taaluitingen zo dat ze zinvol lijken. Maar

(5 + 3) × 7 en
5 + (3 × 7)

zijn los van elke context beide even zinvol en je kunt de haakjes echt niet missen als je je bedoeling ondubbelzinnig wilt laten overkomen, terwijl, er geen behoefte is aan haakjes in

(bejaarde dames) en kinderen
bejaarde (dames en heren)

of in

(Nederlandse taal) en wiskunde
Nederlandse (taal en letteren)

en mocht de behoefte zich echt eens voordoen, dan zou je geheel andere taalmiddelen kiezen om te doen uitkomen wat je bedoelt. In het Engels is er een befaamd voorbeeld,

pretty little girls schools,

waar je naar gelang van de - ontbrekende - haakjes 17 verschillende betekenissen aan kunt hechten, maar in de praktijk van de levende taal zal de *bedoelde* betekenis uit de context blijken óf je zou je bedoeling in heel andere bewoordingen moeten formuleren.

Ik heb voor het karakterverschil tussen moedertaal en wiskundetaal dit voorbeeld gekozen omdat hier aan beide kanten een taak ligt zodra men in het onderwijs meer nastreeft dan het communiceren in een taal, te weten het doel de taal waarin men communiceert tot onderwerp van analyse te maken. Deze bezigheid leidt tot wat men in de wiskunde ‘formaliseren’ noemt: het herzien en nieuw scheppen van taalmiddelen, die zich zo automatisch mogelijk laten hanteren - het meest automatisch in de zogenaamde puur formele talen. Voor de vooruitgang van de wiskunde is dit formaliseren een onmisbare voorwaarde, voor het wiskundeonderwijs betekent het klakkeloos en prematuur overnemen van de uitkomsten van dat formaliseren een gevaar, dat trouwens al lang onderkend is: de leerling wordt gedwongen iets na te apen dat hij niet begrijpt.

Wiskunde dient ergens voor. Echte wiskundeproblemen zijn zelden of nooit zo geformuleerd als men ze in boeken en examentoetsen vindt. Ze ontstaan in situaties die allereerst in de moedertaal worden verwoord, in een moedertaaltekst waaraan geschaafd moet worden, waar je de essentialia uit moet halen, die je moet vertalen in wiskundige termen die je wiskundig bewerkt tot een uitkomst die je terug vertaalt naar de situatie waar je mee gestart bent.

Volgens een oude traditie wordt het toegepaste rekenen geoefend met zo-

genaamde redactiesommen, die eertijds uitmondden in lopende waterkranen die een bad vullen, fietsers die elkaar tegemoet rijden of inhalen, werklieden die al dan niet samenwerken. Voor elk van die typen is er een oplossingsmethode, een algoritme waarin het probleem vertaald wordt - een averechtse toegepaste wiskunde waarvan ook zij bij wie ze aanslaat geen baat hebben. Men streeft tegenwoordig naar het onderwijzen van wiskunde in brede rijke contexten. Jammer genoeg zijn er nogal wat onderwijsgevenden die zich verplicht voelen deze taken voor hún leerlingen te vergemakkelijken door de contexten te ontleden in smalle stroken en te verschralen. Voor míjn leerlingen is dat brede en rijke te moeilijk - redeneren ze en ontnemen hun iets waar ze recht op hebben: het beschrijven en begrijpen van situaties in termen van een geschakeerde moedertaal en het vertalen naar de wiskundetaal toe.

Laat ik dit met een enkel voorbeeld toelichten:

> Een volwassene vertelt dat in de supermarkt in de middag gemiddeld meer publiek is dan in de ochtend. Een elfjarige vraagt wat ‘gemiddeld’ betekent. De volwassene: ‘Neem eens bijvoorbeeld 24, 13, 35. Kun je die optellen?’... ‘Goed, en nu door 3 delen.’

Wel, het gaat precies zo als de volwassene zelf het op school heeft geleerd, buiten elke context gemiddelden uitrekenen en precies zo als in toetsen over gemiddelden wordt gesproken. Maar ‘gemiddeld’ heeft in de omgangstaal een geheel andere functie dan in een kaal sommetje - een vagere functie uiteraard, maar dan een die je eerst in die context waar je omgangstaal spreekt, begrepen moet hebben alvorens het begrip te mathematiseren. Je kunt een lange en gevarieerde lijst opmaken van voorbeelden van ‘gemiddeld’ in de omgangstaal en als je die met de leerlingen analyseert, zal blijken dat er ook qua mathematisering meer achter zit dan de simplistische regel van n getallen op te tellen en de som door n te delen. De gemiddelde jaarlijkse alcoholconsumptie in Nederland bepaal je niet door die van alle individuen afzonderlijk bij elkaar op te tellen en door het aantal individuen te delen, maar je begint direct bij het totale alcoholverbruik, want dat is het enige waar je vat op hebt. Trouwens, waarvóór bepaal je gemiddelden, waarvóór praat je over gemiddelden, over de gemiddelde mens, de modale werknemer? Ook dit zijn vragen die allereerst in een brede en rijke context moeten worden gesteld en beantwoord.

Typeert hetgeen ik tot nu toe te berde bracht de wiskundetaal voldoende in haar verhouding tot de moedertaal? Ik gebruikte af en toe het woord rekentaal, en taal die althans haar vocabulaire met de moedertaal gemeen heeft. Maar één keer kwamen in mijn tekst losse ‘letters’ voor:

> n getallen op te tellen en de som ervan door n te delen

als definitie van het gemiddelde, terwijl letters en letterformules toch een opvallend kenmerk van de wiskundetaal heten te zijn. Ik had de n daarstraks kunnen omzeilen:

> een aantal getallen optellen en door dit aantal delen

waarbij dan ‘een aantal’ de plaats opeist van de *eerste* n en ‘dit aantal’ naar dezelfde n terugverwijst - minder beknopt en minder exact dan in de wis-

kundetaal. Eigenlijk was de formulering van daarstraks ook maar ten dele wiskundestijl: ‘n getallen en de som ervan’vertoont weer dezelfde vaagheid en het vage terugverwijzen dat we zonet bij ‘aantal’ in plaats van n opmerkten. Echt wiskundig zou het moeten zijn:

Definitie: Gemiddelde van a_1, ..., a_n

$$= \frac{1}{n}(a_1 + \ldots a_n)$$

of nog degelijker

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

waar het Σ -teken het sommeren van de a_1 (van 1 tot n) signaleert.

Letters in de wiskunde zijn een erfenis van de Griekse oudheid. Men kan zich een tijd voorstellen toen meetkunde beoefend en medegedeeld werd met figuren in het zand en op de manier van ‘en dan verbind ik dit punt met dat punt en neem er het midden van en laat vanuit dat midden een loodlijn neer op deze lijn daar’. Zoiets heb ik demonstratieve taal genoemd - demonstratief door de ditten en datten, waarvan daarstraks ‘dit aantal’ ook een voorbeeld was.

Voor *mondelinge* communicatie was dit een allicht redelijk bruikbare methode, die moest falen zodra mededelingen schriftelijk moesten worden gefixeerd. Men kwam toen op het idee de punten waarvan in de figuren sprake was te nummeren en wel met de letters van het alfabet, die trouwens bij de Grieken ook dienst deden als cijfers. Men zette die letters naast de punten, waarvan ze als het ware de namen waren, zoals op een landkaart naast een zekere zwarte vlek drukinkt het woord ‘Amsterdam’ kan zijn geplaatst. Maar de methode leverde meer op dan die van het plaatsen van namen op landkaarten. ‘Amsterdam’ op zo'n landkaart is uniek, maar al hetgeen ten aanzien van de getekende driehoek ABC wordt gesteld of bewezen, wordt, geacht voor elke driehoek ABC te gelden. A, B, C zijn niet namen van dit punt en dát punt en nóg een punt - ze zijn wat de wiskundige *variabelen* noemt, veelzinnige namen, waarmee je naar gelang het uitkomt soms dít object en soms dát kunt oproepen.

Ook de moedertaal kent deze veelzinnige namen. Je kunt niet voor elke tafel, elke kei, elke muis, elk tijdstip, elke plaats een nieuwe naam verzinnen. Men spreekt van dé tafel als er in de gegeven situatie maar één in aanmerking komt; zijn het er meer, dan is het ‘deze tafel’ en ‘die tafel’ of de ‘groene tafel’ of ‘de tafel waar de vaas op staat’. En navenant is het met de andere voorbeelden gesteld: ‘de Amersfoortse kei’, ‘de muis in de val’, het ‘nu’ dat telkens weer een andere betekenis heeft naar gelang van het ogenblik waarop ik het uitspreek, het ‘hier’ en ‘daar’, die naar gelang van de plaats van de spreker van betekenis veranderen.

De chaos van variabelen in de moedertaal heeft tot tegenhanger in de wiskundetaal een gestroomlijnd systeem. Tafel, steen, muis, nu, hier, daar - veelzinnige namen die alleen maar voor tafels, stenen, muizen, tijdstippen, plaatsen dienst kunnen doen. En daartegenover: A, B, C, ..., a, b, c, ..., *α, β, γ*, ... enzovoort die voor alles en nog wat moeten komen opdraven. ‘Conventionele variabelen’ noem ik het, namen waar je elke gewenste betekenis

aan mag hechten - maar dan uiteraard één en dezelfde zo vaak als ze in een zekere besloten tekst voorkomen.

Een voorbeeld: Wij leerden op school

> De vierkantswortel uit een getal is dat getal[1] dat gekwadrateerd het oorspronkelijke getal oplevert

een door al die verwijzingen - 'een getal', 'dat getal', 'oorspronkelijk getal' - moeilijk leesbaar en nog moeilijker te begrijpen zin.

Hetzelfde met conventionele variabelen:

> x heet vierkantswortel uit a als $x^2 = a$.

Nog korter, met logische symbolen

> $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow x^2 = a$.

En nog beknopter in 'functionele taal', waarbij het kwadrateren als een functie wordt opgevat:

> Vierkantsworteltrekken is het inverse van kwadrateren.

Het zijn niet meer dan trivialiteiten wat ik hier omtrent de verhouding van wiskundetaal en moedertaal heb uiteengezet. Gesneden koek voor wie het dagelijkse kost is. Onderwijs gaat er vaak aan mank dat de leermeester - voor de klas of als leerboekschrijver - zich niet voldoende realiseert dat wat voor hem gesneden koek is voor de leerling een onverteerbaar brok kan zijn.

Een van mijn - inmiddels overleden - oudcollega's slaakte na 30 jaren onderwijservaring de kreet: 'Elk jaar moet ik het ze opnieuw vertellen want ze leren het toch niet.' Wat dit 'het' was doet hier niet ter zake, maar een mathematisch-linguistische analyse van de variabele 'ze' zou het wel doen.

Maar behalve de kloof tussen leermeester en leerling, die elkaar niet verstaan omdat ze verschillende talen spreken, is er die tussen leer*meesters* die als vogels van diverse pluimage qua toonzetting verschillen. Als het op taal aankomt - een belangrijk maar niet het enige aspect van school en leven - zou je de vakkencombinatie 'wiskunde-moedertaal' voor de toekomstige leraar ideaal willen noemen. Ideaal, ware het niet dat de leermeesters van de toekomstige leraren ook weer vogels van diverse pluimage zijn die hun best zouden moeten doen om elkaar te begeleiden (en het ergens misschien ook doen).

Ik heb de verschillen tussen moedertaal en wiskunde hier - niet breed, want het kan veel breder - op een ongewone wijze uitgemeten; niet qua vocabulaire - niet dat er in de wiskunde geen grotere en kleinere helft bestaat, niet van wat het verschil is tussen een ruit in de wiskunde en een vensterruit, tussen een vierhoek en een vierkant, tussen de hoek die je meet en die waarin je moet gaan staan. De moedertaalkundige aandacht van de wiskundeleraar blijft veelal bij kwesties van vocabulaire bepaald en de wiskundetalige aandacht van de moedertaalleraar tot dat er telwoorden zijn, onbepaalde en bepaalde, hoofd- en rangtelwoorden, terwijl er diep onder deze twee koppels naar heel wat relevante wiskunde kan worden gedolven.

1 We hebben het alleen over niet-negatieve getallen.

Ik heb veeleer de syntactische kant uitgekeken. De ‘en’ in de titel ‘Moedertaal en wiskunde taal’ is zo'n syntactische element en juist in titels kan zo'n voegwoord van alles zijn: nevenschikkend, tegenstellend, ironisch en - ga zo maar door. Ook synthetisch en dat zou je het liefste willen, synthetisch in de zin van opheffing van antithesen. Maar dan moet allereerst de antithese worden uitgewerkt en dat heb ik hier - althans bij wijze van aanduiding - trachten te doen.

In het onderwijs is synthese een zaak van individuele activiteit. De leerling - zeker in het voortgezet onderwijs - wordt geacht wat in verschillende lesuren uit verschillende bronnen op hem afkomt, niet in verschillende hokjes op te bergen, maar zo nauw als het kan onderling te relateren. Het wordt hem niet gemakkelijk gemaakt maar het zou hem vergemakkelijkt kunnen worden als althans aanzetten tot die synthese ‘hogerop’ zouden beginnen. Ik bedoel op het niveau van de leermeesters - die voor de klas of die achter het bureau waar leerplannen en leerboeken ontstaan.

Ontwikkeling van onderwijs - in de klas of achter het bureau - veronderstelt een attitude van bewustmaking en gedachte-experiment: bewustmaking van die kloven tussen leerlingen onderling, leerlingen en leermeesters, en leermeesters onderling en het gedachte-experiment van hun overbrugging - een activiteit waarvoor geen blauwdrukken zijn.

Terug- en vooruitblik

De wiskundetaal waarvan hier sprake was, was die van de getallenrij, het haakjes zetten en de ‘letters’. Welke verbanden zijn hier gelegd met de moedertaal? Hebt u eerder over zulke verbanden nagedacht? Leggen opleiders en leerboeken deze verbanden? Wat zouden wiskunde en moedertaal in onderwijs en opleiding (*eventueel in één persoon verenigd*) *moeten doen om leerlingen en studenten met deze verbanden vertrouwd te maken*?

Hoe moedertaal en wiskundetaal met elkaar samenhangen, wordt in het volgende opstel opnieuw aan de orde gesteld: Het ‘is’-teken, wat is dat wel, wat betekent het, wat kan het betekenen en moet je je er echt veel zorgen over maken?

3. Appels en peren: wiskunde en psychologie

Met het optellen van appels en peren schijnt er volgens een bekend gezegde iets niet te kloppen. Het kan niet, of het mag niet, of het is onredelijk of onzedelijk, naar gelang de toevallige context van die beeldspraak. Bedoelen we het nu eens niet als beeldspraak maar echt, dan kan het heus. Immers:

twee appels en drie peren zijn samen vijf vruchten.

Wat echt *niet* kan, is niet het *optellen* maar het *aftrekken*:

twee appels van drie peren.

Probeer het maar!

Aan de andere kant is het volstrekt niet bezwaarlijk om

twee dubbeltjes bij drie kwartjes op te tellen

en ook

twee dubbeltjes van drie kwartjes af te trekken

of zelfs

twee stuiters bij drie bommen op te tellen

en

twee stuiters van drie bommen af te trekken.

Waar zit hem het verschil?

Het was maar een voorbeeld van een soort vragen die steeds weer aan de orde gesteld worden, hoewel ze al lang zijn beantwoord en dat op alle denkbare niveaus, samen met de vraag wat op welk niveau wenselijk en haalbaar is. Maar het is net als op school: je kunt iets nooit vaak genoeg zeggen.

Ik beperk me hier tot wat zich afspeelt rond de wiskunde-operaties van optellen en aftrekken. Vermenigvuldigen en delen waar het in principe eender mee gesteld is, laat ik voor het gemak buiten beschouwing.

Optellen heeft iets te maken met toevoegen en wegnemen. Dingmatig toevoegen en wegnemen. Ik zeg ‘dingmatig’ en niet ‘concreet’. De twee appels en drie peren kunnen concreet op een concrete schaal liggen, maar even fraai op een schaal liggend afgebeeld of verbeeld zijn en tenslotte hoeven het helemaal niet dé twee appels en dé drie peren te zijn, maar zo maar twee appels en zo maar drie peren: een algemeen tweetal appels en een algemeen drietal peren. Het zijn mijlenver uiteenliggende niveaus van abstracties waar behalve de piekerende filosoof niemand zich iets van aantrekt. Ik heb er, om er niet te veel soesa van te maken, het woord ‘dingmatig’ voor gekozen: dingmatig toevoegen en dingmatig weghalen. Van hoe concreet die ‘dingen’ zijn, hoef ik me niets aan te trekken. Optellen en aftrekken als rekenkundige bewerkingen in de realiteit gaat niet *ding*matig maar *getal*matig te werk (of volgens lengten, gewichten, geldwaarden, maar daar kom ik nog op terug). Of, anders gezegd, je moet goed uitkijken welke soort dingen je daar optelt en aftrekt.

Euclides zei: ‘Eenheid is datgene waarmee je elk ding één kunt noemen.’ Het klinkt vreemd, maar het wordt duidelijker als ik ermee doorga: ‘Tweeheid is datgene waarmee je elk tweetal dingen twee kunt noemen’, enzo-

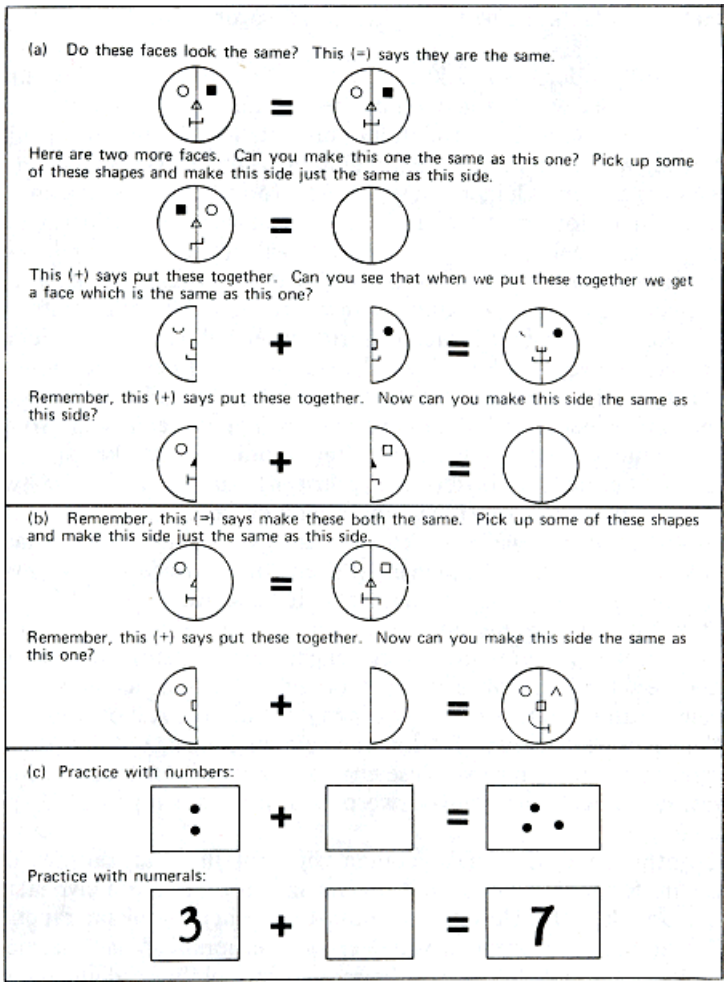
voort. Zodoende kun je van twee paarden net zo praten als van bruine paarden, hoewel geen van die paarden twee is.

Euclides ging trouwens niet zo door, maar veeleer: Getal is de uit eenheden samengestelde verzameling. Dit was nog tot in deze eeuw het idee van wat getallen zijn: uit (denkbeeldige) eenheden samengesteld. Zelfs de onvolprezen Cantor huldigt nog deze opvatting, al laat hij oneindige verzamelingen toe. Om in de realiteit iets te tellen, op te tellen, af te trekken, grijp je als het ware naar dat denkbeeldige telraam van eenheden, je beeldt er de te tellen, de op te tellen, de af te trekken verzamelingen op af en voert de gewenste operaties op dit telraam uit. In de praktijk mag je dat denkbeeldige telraam best concretiseren of hoef je er niet eens een denkbeeldig of concreet telraam bij te halen. Je telt de mensen in de kamer door ze elk maar als mens te beschouwen (niet als Piet, Mies, man, vrouw, enzovoort) of hun neuzen (kleine, grote, kromme, rechte - het doet er niet toe). Je beschouwt wat je moet tellen als gelijksoortig; als je een soortnaam nodig hebt, verzin je er maar een (appels en peren zijn allebei vruchten). Je identificeert ze, berooft ze van alle kenmerken behalve van dat dat ze verschillen. Het zijn geen abstracte eenheden maar dingen, maar dan zonder speciale kenmerken. Zodoende kun je dan best twee appels bij drie peren op tellen, als je ze maar als vruchten signaleert, net zoals je de Jan, Piet, ... enzovoort in de kamer optelt door er mensen van te maken. Maar appels van peren aftrekken faalt al op het dingmatig niveau en het over één kam scheren komt er niet eens bij te pas.

Tegenwoordig houd je er achter dit concrete gebeuren een minder geïdealiseerde theorie op na. Het denkbeeldige telraam van eenheden hoeft niet. Je bent op de een of andere manier aan de getallenrij gekomen - in de praktijk door het opzeggen en op lange stroken schrijven van de telwoorden en cijfergetallen en in de mathematische theorie door wat je noemt de axioma's van Peano die je (onder meer) een 0 en bij elk getal één volgende garanderen. Dat zijn de dingen die je optelt en aftrekt en het verband met de realiteit wordt door afbeelden gelegd. Door een verzameling te tellen beeld je hem één-één in de telrij af tot hij uitgeput is bij hetgeen je zijn aantal noemt. Het aantal - zeg je ook - is een functie van de verzameling en wat je optelt en aftrekt zijn niet de verzamelingen maar hun aantallen. Het verband met de realiteit is dat hierbij aan het samenvoegen van gescheiden verzamelingen het optellen van hun aantal beantwoordt en aan het wegnemen uit een verzameling het aftrekken.

Hét verband? Neen, een verband, want optellen en aftrekken verantwoorden meer dan alleen maar dingmatig samenvatten en wegnemen. Als Jan evenveel knikkers heeft als Lies en Mies samen, wil dit niet zeggen dat die van Lies en Mies samen die van Jan opleveren; wel zegt het iets over de som van de functiewaarden. Als ik wil weten hoeveel knikkers Jan meer heeft dan Lies, kom ik er niet door van Jans knikkervoorraad iets weg te nemen wat hij niet eens heeft (te weten Lies' knikkers), maar door aantallen van elkaar af te trekken. Toch blijft de ‘deel - geheel-relatie’ in de onderwijskundige literatuur spoken - wat er aan schort gaan we later nog preciezer na.

Maar eerst nog eens het verschil tussen dingmatig en getalmatig optellen. Een halve kaas en nog een halve kaas opgeteld zijn twee halve kazen en niet een hele, ook al zijn het allebei Goudse en niet de één een Goudse en de andere een Edammer. Natuurlijk mag je van twee halve Goudse kazen ook één hele maken. Niet bij wijze van optellen maar bij wijze van aan elkaar plakken. Onderzoekers van onderwijs hebben daar niet altijd even heldere ideeën over, zoals uit het plaatje blijkt of uit een verhaal, waarbij hoofd, twee armen, romp en twee benen bij elkaar opgeteld als som een mens opleveren. Om op de kazen terug te komen, je kunt ze wel qua gewicht, volume en prijs bij elkaar optellen; dan gaat het echter niet om kazen maar om kaas, en analoog is het met onderdelen van het menselijk lichaam gesteld. Ook dit komt later nog aan de beurt.


(a) Do these faces look the same? This (=) says they are the same.
Here are two more faces. Can you make this one the same as this one? Pick up some of these shapes and make this side just the same as this side.
This (+) says put these together. Can you see that when we put these together we get a face which is the same as this one?
Remember, this (+) says put these together. Now can you make this side the same as this side?
(b) Remember, this (=) says make these both the same. Pick up some of these shapes and make this side just the same as this side.
Remember, this (+) says put these together. Now can you make this side the same as this one?
(c) Practice with numbers:
Practice with numerals:
3
7

figuur 3.1

In spijt van de deel - geheel-relatie, die ondanks alle pogingen om uit te roeien voortwoekert, is 3 geen deel van 5. Bij het opzeggen van de getallenrij komt 3 vóór 5 en dat wordt als 3 < 5 genoteerd. Wel kun je twee verzamelingen maken zodat die met aantal 3 deel is van die met aantal 5 en zitten er in elke verzameling met aantal 5 ook verzamelingen met aantal 3 (en niet omgekeerd). Maar 3 peren zijn, hoe je het ook wendt of keert, geen deel van 5 pruimen en daar lopen bepaalde aftreksommen op stuk. 5 is meer dan 3, vijf pruimen is meer dan drie pruimen en als je wilt zijn 5 pruimen meer vruchten dan 3 peren. Als vijf meisjes en drie jongens bij elkaar zijn, dan zijn het meer meisjes dan jongens. Maar vraag niet: 'Hoeveel meer?' Althans niet aan jonge kinderen. Ze zullen er steevast op antwoorden: 5. Of vraag het ze wel, want ze moeten de taalkundige constructie 'hoeveel meer, hoeveel minder' (in alle talen die ik ken dezelfde gekke constructie) nog leren. Het is een taalkundig, geen rekenkundig probleem.

Meer of minder - soms kun je het met één oogopslag zien, maar ook dat kan en moet worden geoefend. Zo niet, dan ga je tellen. Een belangrijkere rol als initiërend element dan bij pure getallen spelen de vergelijkende trappen bij wat men noemt grootheden, juist omdat daar niet direct iets te tellen valt: groter - kleiner, langer - korter (ook van tijdsduur), zwaarder - lichter, ouder - jonger, warmer - kouder, duurder - goedkoper. Onze kinderen mogen zich gelukkig prijzen met dit taalverschijnsel vergeleken bij Franssprekenden, voor wie 'plus' en 'moins' de ene keer los en de andere keer gekoppeld aan een bijvoeglijk naamwoord, elkaar ernstig verstoren, zoals uit talrijke (Franstalige) Piaget-experimenten blijkt. Groter - kleiner, langer - korter enzovoort, ze hebben allemaal niets met een deel - geheel-relatie te maken of je moet er die met de haren bijslepen. De vergelijkende trap is een universeel taalmiddel om voorwerpen en verschijnselen volgens bepaalde kenmerken op een rijtje te zetten: mooier, zoeter, knapper, vervelender. Expres heb ik net voorbeelden gekozen, waarbij er niets te kwantificeren valt - niet eens in de zin van 'hoeveel mooier' enzovoort.

Grootheden zijn wel voor kwantificatie vatbaar, maar ook daar speelt de deel - geheel-relatie hoegenaamd geen rol. Of twee voorwerpen even lang zijn of welk langer is, constateer je door ze naast elkaar te leggen - direct of door bemiddeling van een derde - of op tal van andere manieren. Inhouden van glazen worden vergeleken door vloeistof van het ene in het andere te scheppen, volumes van voorwerpen door ze in een vloeistof te dompelen, ruilwaarden van voorwerpen door directe ruil of door ruil met geld. Net als aantallen functies zijn van verzamelingen, zijn grootheden functies van voorwerpen en verschijnselen: de lengte van een weg, de inhoud van een vat, de zwaarte van een voorwerp, de duur van een proces, de prijs van een waar.

Grootheden zijn, evenals getallen voor optelling vatbaar met als tegenhanger in de realiteit het samenstellen van wegen, het samenvoegen van vaten, het op elkaar aansluiten van tijdsaflopen, het bij elkaar rapen van waren. Tot zo ver is er ook hier van deel - geheel sprake. Maar daarmee kom je er bij lange na niet. Er moeten begrippen van gelijkwaardigheid (equivalentie)

bij of directer gezegd: methoden om voorwerpen of verschijnselen ten aanzien van bepaalde kenmerken aan elkaar gelijk te stellen - qua lengte, qua inhoud, qua zwaarte, qua duur, qua ruilwaarde. Daar hoeven nog geen getallen aan te pas te komen, zelfs niet bij het optellen. Twee landen zijn samen even groot als een derde; twee kinderen (op de wip) wegen samen evenveel als twee andere; twee zakken van dit zijn goedkoper dan drie zakken van dat.

Het verband tussen grootheden en getallen ontstaat doordat je gelijksoortige met elkaar meet. Hoeveel keer gaat de ene in de andere op? Het hoeft niet een geheel aantal keren en zodoende, bij het meten, melden de breuken zich aan. Hoe lang?, hoe zwaar?, hoe duur? wordt dan getalmatig beantwoord met een eenheidsmaat erbij, m, kg, ƒ of cm, ton, $ met ruilvoeten tussen gelijksoortige. Die kun je dan bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken, zelfs om een voorbeeld van het begin op te halen: twee dubbeltjes aftrekken van drie kwartjes.

Tot nu toe heb ik me nauwelijks met notaties beziggehouden. Zoveel mogelijk heb ik alles in de omgangstaal geformuleerd.

4 + 3 =

lees je als ‘vier plus drie is’ en wat de ‘plus’ betekent wordt op diverse manieren uitgelegd. De ‘is’ betekent klaarblijkelijk dat je er moet achterzetten wat er uitkomt als de drie bij de vier wordt opgeteld. In vroegere tijden las je het dan ook ‘maakt’, ‘machen’, ‘font’, ‘facit’. De 4 en de 3 maken samen de 7.

Toen kwamen er de stipsommen zoals

4 + . = 7

hetgeen toen ik schoolging met een vraagteken in plaats van een stip werd geschreven en ‘4 plus hoeveel maakt 7’ werd gelezen. Waar de stipsommen goed voor waren, werd ons uiteraard niet verteld. De geschiedenis van de stipsommen zou nog eens geschreven moeten worden.

Ik vermoed dat ze uitgevonden werden, om redactiesommen van het soort ‘Jan had gisteren 4 knikkers en vandaag heeft hij er 7; hoeveel heeft hij er ondertussen bijgewonnen?’ te vergemakkelijken. Als dit zo is zijn ze inmiddels hun bestemming kwijtgeraakt. Niemand - boekjesschrijver, onderwijzer, leerling - legt nog verband tussen stip- en redactiesommen. Je zou natuurlijk kunnen eisen dat de leerling netjes onder

Jan is 4 en Piet 7 jaar

na de vraag

hoeveel is Piet ouder dan Jan?

de stipsom

4 + . = 7

en na de vraag

hoeveel is Jan jonger dan Piet?

de stipsom

7 - . = 4

plaatst. Het lijkt gezocht, maar er zijn er heus die menen dat didactiek bestaat in het berijden van dit soort stokpaardjes.

Inmiddels zijn stipsommen, zo niet in het onderwijs dan toch in het onder-

zoek van onderwijs, tot grote bloei geraakt. Het begon met het type

7 = 4 + .

waar de op gewone stipsommen getrainde kinderen geen raad mee wisten en na de nodige ‘successen’ van afgangen ging het door met

3 = . - 4
8 - 1 = 5 + .
5 + 2 = . - 1
. - 1 = 5 + 2

Het ontbreekt er nog aan dat die duizelingwekkende verscheidenheid gesystematiseerd wordt en met factor- en regressie-analyse statistisch te lijf wordt gegaan.

Hoe is de geschiedenis van de stipsommen nu in deze stroomversnelling geraakt? Om dit te verklaren, moet ik er heel wat bijhalen: de logische status van het ‘is’-teken.

Wiskundigen hebben de gewoonte van alles en nog wat een probleem te maken. Een lofwaardige gewoonte zolang je die problematiek binnen de perken houdt waar ze ontstaan is, althans niet in een onbeheersbare bosbrand laat ontaarden.

4 + 3

mag wel een ‘is’-teken vereisen als signaal om bij de 4 een 3 op te tellen, maar hoe is het dan met

a + b

gesteld, dat in de algebra opduikt? Een ‘is’-teken erachter? Wat valt er dan uit te rekenen als je noch a noch b kent? En die a + b kun je toch echt niet missen, als je naar $(a + b)^2$ en ik weet niet wat nog allemaal toe wilt.

Algebra werd eens als letterrekenen onderwezen en a + b kwam inderdaad te pas in een lettersommetje zoals

$(a + b)^2 =$

dat duidelijk aangaf wat hier gevraagd was, of ook in

$a^2 + 2ab + b^2 =$

waar het even duidelijk was, tenminste als de leraar het had uitgelegd. Leeftijdsgenoten die ik tegenwoordig ontmoet, vertellen me geregeld dat ze die sommen best konden doen, zonder de minste notie wat die letters betekenden.

Ik weet niet, wanneer dit voor het eerst als didactisch probleem werd opgevat, maar de generatie van mijn kinderen schijnt daar al meer weet van te hebben gehad: letters betekenden getallen, onbekende of onbepaalde of variabele - de functiegrafieken hebben daar wel toe bijgedragen. En ineens was het duidelijk wat

a + b

(met of zonder ‘is’-teken) betekende: als a en b zekere getallen zijn, is a + b ook een getal, te weten de som van a en b. En ineens trok de sluier op boven de hele letter-algebra. Dit inzicht, in de algebra verworven, ging nu in het tijdperk van New Math doorsijpelen naar het rekenonderwijs. Wat betekent 4 + 3? De voorwaarde ‘als a en b getallen zijn’ kun je hier laten vervallen want immers 4 en 3 zijn vanzelf getallen.

Dus het antwoord: 4 + 3, tot nu als som beschouwd, is een getal. Welk getal? Natuurlijk het getal 7. Natuurlijk? Waarom natuurlijk? Als 4 + 3 een getal is, waarom mag ik het niet 4 + 3 blijven noemen? Of 10 - 3, 21/3, √49? Het zijn immers niet, zoals je vroeger dacht, sommetjes, maar getallen. En toch ben je verplicht, er 7 voor te schrijven.

Ik had het al aangekondigd. Ik moet er heel wat bijhalen om de stroomversnelling van stipsommen te verklaren. Dingen - concrete of gedachte - roep je op met woorden, met hun namen. Feiten en kwesties omtrent die dingen roep je op met stellende en vragende zinnen, uit woorden opgebouwd, en deze zinnen zijn dan om zo te zeggen de namen voor die feiten en kwesties. Maar de taal is rijk (en soms ook arm). Er zijn dingen die je met een veeltal namen kunt oproepen (en andere waar je moeite mee hebt om ook maar één voor te verzinnen). Zodoende zijn er voor hetzelfde getal de namen 7, 4 + 3 21/3, √49 enzovoort en het is-teken houdt niets anders in dan dat aan weerszijden namen van hetzelfde ding staan.

Wat houdt zo'n schrijfsel als

4 + 3 = 7

dan in? Hoegenaamd niets. Aan weerszijden staan namen van hetzelfde ding. En voor zover 4 + 3 = 7 in al zijn bescheidenheid representatief mag zijn voor de diepste wetenschap, zou je kunnen zeggen dat al onze kennis erin bestaat uiteenlopende namen te verzinnen of te hebben verzonnen voor dezelfde dingen.

Maar het is evenzeer duidelijk, dat hier iets niet in de haak is.

De graaf die in 1296 op het Muiderslot werd vermoord = Floris V,
De man op Fr. Schubertstraat 44 in Utrecht = schrijver dezes,
De moordenaar van... =... (vul bij de stippeltjes iets in)
‘De vierkleurenhypothese klopt’ = waar,

ziedaar overal rechts en links van het is-teken namen voor hetzelfde object, maar - helaas - om dit feit te verifiëren moet je geschiedeniskennis, of je adreslijst, of de recherche of de computer er aan te pas komen.

Zo eenvoudig was het dus niet. Wat bij taaluitingen telt is, naast hun formele structuur, hun intentie. Naast? Neen, allereerst. Zinsontleding, taalontleding is iets van een hogere plank dan van een taaluiting de intentie te begrijpen.

4 + 3 =

brengt een intentie over, die van een sommetje. De logische analyse van

4 + 3 = 7

noemde ik iets van een hogere plank. Dus iets om naar toe te groeien. Met een trapje zou je er uiteraard ook bij kunnen komen of je laat je eventjes optillen. Dat bedoelden de welmenende schoolboekauteurs uit het voorbije tijdperk van New Math. Je bracht kinderen - liefst als kleuters - als bedoeling van het is-teken bij dat aan weerszijden ‘hetzelfde’ zou staan. Het leek zinsontleding oefenen met een kind dat net leert praten. In de onderwijs*kunst* is dit al weer van de baan, maar inmiddels zijn onderwijs*kunde* en -*psychologie* erdoor gegrepen als door een openbaring.

Een bezwaar van verklaringen van de bovenste plank is, dat ze op normale leefhoogte (en zeker op die van het lerende kind) niet operationeel zijn. Je moet je er toch tegen kunnen wapenen dat 4 + 3 = wordt beantwoord met - lekker! -

4 + 3 = 3 + 4

of - nog brutaler -

4 + 3 = 4 + 3.

De New Math-ers hebben er toen iets op uitgevonden. Boven zo'n stel sommen zetten ze:

Vul in de standaardnamen van...

Inderdaad, onder de namen waarmee je getallen of andere concrete of gedachte objecten kunt oproepen, zijn zekere voorkeurnamen, om zo te zeggen, de namen waaronder je voor het eerst met ze kennis hebt gemaakt. '7' is de standaardnaam van wat je later ook tegenkomt in 4 + 3, 10 -3, 21/3, √49. 'Standaardnaam' is natuurlijk geen wiskundig begrip. Het is een pragmatisch begrip. 'Namen voor hetzelfde ding aan weerszijden van het is-teken' is onberispelijke taal, maar als je op 4 + 3 = het antwoord 7 wenst, moet je je voorkeur voor standaardnamen kenbaar maken, met een beroep op de welwillendheid van de goede verstaander die je voorkeur kent en billijkt.

'Zo moet het van de meester' is zo gek nog niet, al wordt de meester later een meneer, een schoolboekauteur of een toetsenbakker.

Maar laten we dan de verklaring van de bovenste plank aanvaarden dat aan weerszijden van het is-teken 'hetzelfde' staat, alleen met verschillende namen opgeroepen. Is dan behalve

4 + 3 = 7

ook

4 m + 3 m = 7 m
4 kg + 3 kg = 7 kg
4 ct + 3 ct = 7 ct

gerechtvaardigd? Ja, want 4 m stelt geen staf, 4 kg geen metalen gewicht en 4 ct geen stel van 4 centen voor (en overeenkomstig met de 3 en 7). Het zijn lengtematen, gewichten, geldwaarden. En hoe is het met

4 knikkers + 3 knikkers = 7 knikkers

gesteld? Jan heeft 4 knikkers en Piet heeft er 3 meer; hoeveel heeft Piet dan? Daar klopt iets niet. Het begint trouwens al eerder, met

4 knikkers = 4 knikkers.

Die vier van Lies zijn toch niet dezelfde als die van Mies. Maar de wiskundige die dit kromme is-teken recht moet praten, laat zich voor geen gat vangen. Hij heeft er iets op uitgevonden dat altijd werkt. Hij vormt wat je noemt de klasse van alle viertallen knikkers (en voor dat soort klassen een optelling) waar 'vier knikkers' dan

een naam voor is om op te roepen en dan staat weer rechts en links van het is-teken hetzelfde, ook bij

4 knikkers + 3 knikkers = 7 knikkers.

Het is nu zelfs iets van de allerbovenste plank, maar ik wilde het u toch niet onthouden.

Van een leerling die nooit eerder een stipsom is tegengekomen, kun je niet verwachten, dat hij de bedoeling van

4 + . = 7

begrijpt. In de vorm

wat stond er in onder de inktvlek?

is de opdracht tenminste zelfverklarend. Maar een type zoals

7 = 4 + .

is ook in de vorm

wat stond er in onder de inktvlek?

niet zelfverklarend als de leerling nooit eerder schrijfsels zoals

7 = 4 + 3

is tegengekomen. Voor de onderzoeker is gelukkig het feit dat het kind

7 = 4 + 3

niet als even vanzelfsprekend beschouwt als

4 + 3 = 7

het bewijs dat het is-teken niet begrepen is. Het is-teken, wel te verstaan, van de wiskunde van de bovenste plank. Daar kun je dan het kind naar toe optillen door met hem het ‘omdraaien’ van gelijkheden systematisch te oefenen. Zelfs van een gelijkheid zoals

7 = 7

als je maar de ene 7 rood en de andere groen schrijft.

Ik bedoel hier geenszins mee uitdrukkingen zoals

7 = 4 + 3

taboe te verklaren en evenmin hieraan beantwoordende sommetjes. Er kan wel degelijk behoefte aan zijn, maar dan niet één, ingegeven door een dogmatisme omtrent de betekenis van het is-teken. Op den duur moet het kind rekenkundige uitdrukkingen los van enige context kunnen hanteren, maar als instap verdient context de voorkeur boven formele aanwijzingen (in casu: ‘draai de vergelijking om’). En die context is er: Als 7 personen zich over twee auto's moeten verdelen, kan

7 = 4 + 3

een natuurlijke symboliek hiervoor zijn. Trouwens ook

7 = 3 + 4

dat misschien een ander gebeuren beschrijft. Ook

7 = 5 + 2

kan aannemelijk zijn, terwijl aan

7 = 6 + 1

een heel verhaal te pas komt en zeer zeker aan

7 = 7 + 0.

Ook naar de (paradigmatische) equivalentie van

4 + 3 = 7 en 7 = 4 + 3

hoeft men niet via papieren eigenschappen van het is-teken toe te stappen, maar door bijvoorbeeld aan één keer de samenvoeging van twee blokkentreintjes van 4 en 3 en de andere keer de splitsing van één blokkentrein van 7 te symboliseren.

Voor aftreksommen kan men iets dergelijks verzinnen. Een moedereend

met 4 kleintjes kan uit een nest komen van 7 waar 3 van dood zijn gegaan en dat wordt dan door

4 = 7 - 3

beschreven, maar misschien was het ook

4 = 8 - 4

of... ga zo maar door. En je kunt er vragen aan vastknopen zoals ‘en als het eerst 10 zijn geweest?’ of ‘en wanneer er 5 zijn doodgegaan?’

Het kan nog ingewikkelder:

Als Jan 8 en Piet 4 knikkers heeft, wat moeten ze onderling doen om evenveel te hebben?

Of

... opdat Jan 2 meer heeft dan Piet?

En hoe is het met

... Jan 3 meer dan Piet

gesteld?

Als je desondanks op de symmetrie van het is-teken af wilt, beschik je over andere taalmiddelen om ‘éénrichtingsverkeer’ te symboliseren, bijvoorbeeld de pijlentaal. Vooral in dynamische situaties is dat doeltreffend: Bussen met haltes waar in- en úitgestapt wordt, kegels die omgegooid of opgezet worden, voorraden die slinken en aangevuld worden.

\+ 3
4 → 7

kan veelvuldig geïnterpreteerd worden of omgekeerd als beschrijving van velerlei gebeurtenissen dienen. Handelingstaal is oorspronkelijker dan statische taal. De lezing

vier plus drie
voor

4 + 3

is eigenlijk ‘fout’. Wiskundige puristen moeten dit lezen als

som van 4 en 3

en in de zogenaamde Poolse notatie is het dan ook

\+ (4,3).

Als je iemand de weg wilt wijzen, zeg je bijvoorbeeld: ‘Bij het tweede stoplicht rechts af, dan de tweede zijstraat links tot het stoplicht en dan rechts af’ en niet ‘rechter zijstraat bij het stoplicht van de tweede linker zijstraat bij het tweede stoplicht.’

Pijlentaal of niet - optellen en aftrekken zijn handelingen en die moet je leren beheersen eer je naar ‘som’ en ‘verschil’ toegroeit.

Terug- en vooruitblik

Hoeveel valt er niet over het is-teken te zeggen en moet dit allemaal? Onderwijskundigen en psychologen hebben gemeend dit onderwerp van de hoogste wiskundeplank naar beneden te halen. Dit opstel werd geschreven om de leerling tegen deze wijsheid te beschermen en de onderwijzer en ontwikkelaar voor de angstcomplexen te behoeden of hij het wel goed doet. Ga even in diverse rekenmethodes na hoe simpel of hoe geleerd ze dit probleem, vooral in verband met stipsommen, aanpakken. Kijk ook naar handleidingen en, als u ze tegenkomt, naar theoretische uiteenzettingen, om de kritiek toe te passen.

Op dit zeer speciale onderwerp volgt er een van zeer algemene strekking, maar dan in de context van zeer concrete voorbeelden.

4. Wiskundig-didactische principes - vanuit het rekenonderwijs gezien

‘Rekenen - bestaat dat nog?’ is de vertaalde titel van een stuk dat ik voor een buitenlands tijdschrift heb geschreven. Dank zij IOWO en Wiskobas is Nederland de vloedgolf van averechtse vernieuwing bespaard gebleven die in de jaren zestig en zeventig de onderwijswereld overspoelde en speciaal in onze buurlanden zware vernielingen in het reken-wiskunde-onderwijs aanrichtte. Ik stelde de ouders in den vreemde gerust: Ondanks alles wordt er nog gerekend, door kinderen op school omdat zij het moeten, en door computers die het zoveel nauwkeuriger en sneller kunnen. Ze hadden zich nodeloos bezorgd gemaakt dat hun kinderen het rekenen zouden kunnen missen dat zij zelf eens geleerd hadden. En toch, ‘tegenwoordig kunnen ze niet meer rekenen’ is een weeklacht, zo oud als het rekenonderwijs, en dat ze terecht is blijkt uit internationaal testonderzoek: de helft der zestienjarigen presteert niet wat je van twaalfjarigen eist. Was het vroeger beter? Ze hebben het toen niet getest.

Vroeger - daarmee bedoel ik de tijd toen rekenen nog een broodwinning was - bijvoorbeeld de rekenkunst van de boekhouder. Maar met de elektronische van nu kunnen de menselijke rekenaars niet meer concurreren. Ondertussen leren ze ondanks brommers en auto's nog steeds lopen en fietsen, en sommige doen het nog voor hun plezier ook, met vierdaagsen en fietstochten, waar je wellicht met brommer en auto naar toegaat voor de start.

Dank zij de computer en zijn maatschappelijke gevolgen is het rekenonderwijs aan herwaardering toe, maar dan aan een andere dan ze rond 1960 van droomden. Rekenen is wiskunde - zeiden ze toen. Akkoord! Maar er is wiskunde in soorten - van de wiskunde die je zelf toebereidt tot de wiskunde die je voorgeschoteld krijgt. Was de ene maar even lekker als de andere!

De wiskunde heeft een lange geschiedenis, ontsproten aan de behoeften van het dagelijks leven en in gedurige wisselwerking met leven en realiteit vervolgd. Maar je kunt de wiskunde ook puur bedrijven, los van de realiteit dank zij de logische dwang waarmee het een uit het ander volgt. Tegenover die dwang staat echter de vrijheid je uitgangspunten te kiezen en nieuwe wegen in te slaan, gevestigde theorieën ondersteboven en binnenste buiten te keren.

Tegen het midden van deze eeuw heeft een Franse groep, Bourbaki genaamd, orde op zaken willen stellen. Ze hebben de hele pure wiskunde een monumentale structuur willen opleggen, waarvan naïevelingen menen dat het dé structuur van de wiskunde is.

Erger dan dit: er waren er gezaghebbenden die meenden dat wiskunde volgens zulk een systeem moest worden onderwezen, liefst vanaf de kleuterschool. Het is danig misgelopen. De prachtige logische structuur mag een esthetisch genot zijn voor kenners die heel wat wiskunde hebben verwor-

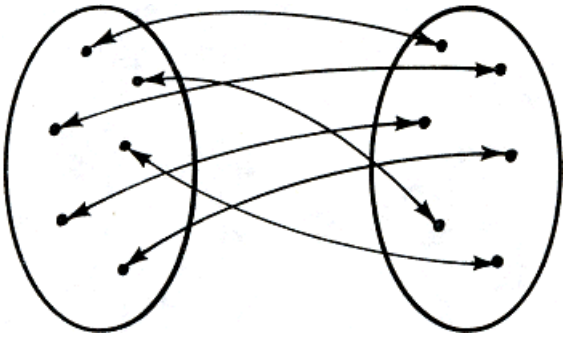
ven - veel meer dan waar de grote meerderheid aan toe komt. Wiskunde volgens dit patroon is alsof je kinderen de muziek inleidt met Bach en Beethoven.

De geschiedenis van de wiskunde was een lang leerproces van de mensheid. Het kind kan dit proces niet zomaar voortzetten, maar dank zij het onderwijs hoeft het dit proces ook niet te herhalen. Wie onderwijs ontwerpt moet de punten kennen waar de lerende in het leerproces van de mensheid in kan instappen en weten hoe hij dit leerproces kan verkorten.

De mislukte pogingen van de jaren zestig en zeventig hebben hun die het niet al wisten een kostbare les geleerd:

> *Structuur der wiskunde is geen gids voor curriculumstructuur*.

Ook het getalbegrip heeft zijn geschiedenis. Het getal heeft veel aspecten, waaronder het cardinale - het *aantal* - en het ordinale - het *teltal*. Wiskundig kun je naar believen van het ene of van het andere uitgaan. Het cardinale aspect lijkt het meer fundamentele. Je hebt er niets voor nodig dan de kale verzameling. Heb je er twee en tracht je ze één aan één op elkaar af te beelden (figuur 4.1) en lukt het, dan hebben ze hetzelfde aantal, of schiet er bij de een iets over, dan is zíjn aantal groter en dat van de ander kleiner. *Hoe* groot de aantallen zijn, komt niet ter sprake.



figuur 4.1

Daar kun je puur wiskundig mee de voeten uit en in de praktijk ook bij heel kleine of sterk uiteenlopende aantallen. Maar dat zijn subtiliteiten voor wiskundigen. Tot de wereld van het kind in spel en taal behoort het tellen, en via het teltal werd van ouds het rekenen onderwezen. Dat ze het in de jaren zestig en zeventig met het aantal probeerden was een didactische misvatting. Het aantal komt in de traditionele opbouw vanzelf tot zijn recht zonder dat je het vooropstelt. Als een kind zonder te tellen weet dat er in een kamer evenveel mensen zijn als neuzen, evenveel oren als ogen (en dubbel zoveel als neuzen); dat er op een gesloten kralensnoer met afwisselend witte en zwarte kralen evenveel van elke kleur zitten; dat je om zakdoeken aan een lijn op te hangen een knijper meer nodig hebt dan er zakdoeken zijn; en als dit redelijk wordt gemotiveerd, heeft het kind ook het cardinaal aspect begrepen en dan op het niveau dat des kinds is.

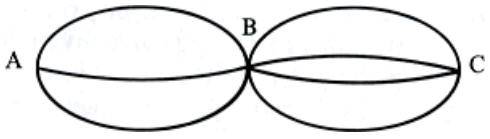
> *Ontwikkelingspsychologisch vloeit het cardinaalgetal uit inwendige en uitwendige waarnemingen voort zonder de behoefte aan verzamelingen en ad-hoc-afbeeldingen*.

Maar ook het teltal van het kind is wat structuur aangaat anders en dan rijker dan dat van de wiskundige op hoog niveau. Het teltal van het dagelijks leven sluit de tientallige positiestructuur in, die puur wiskundig niets om het lijf heeft. Zonder de tientallige structuur van de telwoorden zouden we nooit leren tellen en rekenen - wederom een bewijs ervoor dat structuur der wiskunde geen gids is voor curriculumstructuur.

Er komt nog iets bij. Om verzamelingen van objecten te tellen moet men er een patroon in zien, een structuur in aanbrengen. Het vergemakkelijkt het tellen en dient bovendien nog vele andere doelen. Getallen zijn abstracties, maar het kind moet de getallen in de realiteit ervaren: hoeveel kinderen op de speelplaats, hoeveel vissen in het aquarium, hoeveel vogels in de lucht (figuur 4.2), hoeveel kralen op het snoer (figuur 4.3)? Je kunt ze in de haast niet tellen, maar op zijn minst kun je ze schatten en daarvoor moet je er structuur in aanbrengen. Dit moet je voor handig tellen altijd. Op hoeveel wegen kun je van A over B naar C (figuur 4.4), hoeveel sterren heeft de Amerikaanse vlag, op hoeveel manieren kun je een aantal dingen rangschikken?

figuur 4.2

figuur 4.3



figuur 4.4

Het is handig tellen door middel van structureren.

> *Het kind moet leren structuren in de perceptieve en mentale wereld te ontdekken en te scheppen*.

Structuren moeten aan de lerende niet worden opgelegd, geen structuren binnen de wiskunde en zeker niet een structuur van de hele wiskunde die immers niet tot de wereld van het kind behoort. Het is een oude klacht dat de mensen, op welk niveau ook, de wiskunde die ze geleerd zouden hebben niet kunnen toepassen, soms zelfs niet in de eenvoudigste situaties. ‘Als iemand van 216 km al 82 km gereden heeft, hoeveel moet hij dan nog rijden?’ Tallozen lossen dit op door 82 tot 100 aan te vullen, er 100 bij op te tellen en tenslotte nog eens 16. Ze lossen de opgave op zoals men het begrijpelijkerwijs in de winkel doet, additief in plaats van subtractief. Op zichzelf doet het er niet toe als het maar goed uitkomt. Het is inzichtelijk, maar ondoelmatig. Aan wie het op deze manier doen is de min-toets van het rekendoosje niet besteed. Evenmin hebben ze iets aan de deeltoets als ze gewend zijn, vermenigvuldigingen als surrogaatdelingen uit te voeren of als ze niet weten wat je door wat moet delen als afstand en snelheid gegeven zijn en je de tijd moet bepalen.

Er zijn twee redenen waarom mensen eenvoudige wiskunde als het erop aankomt niet kunnen toepassen. De één is de verkeerde volgorde: eerst een formele of abstracte methode onderwijzen en achteraf onderwijzen hoe je hem toepast, terwijl het juist omgekeerd zou moeten: Beginnen met rijke contexten om ze te mathematiseren - dus abstracties wel als uitkomsten maar niet als uitgangspunten van het leerproces.

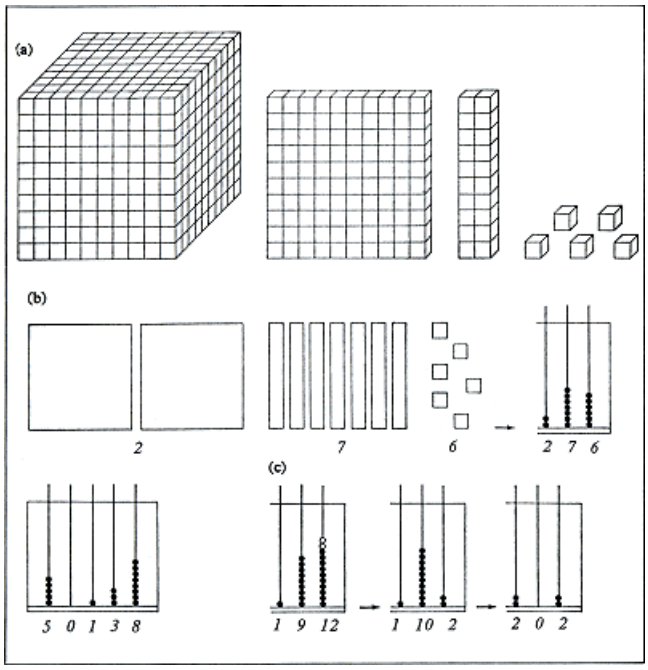
> *Wiskundige abstracties toepassen is didactisch een foutieve orde. De juiste is: mathematiseren van rijke contexten*.

Dit geldt zelfs voor het leren cijferen en dan loop ik meteen op de conclusie vooruit, omdat dit de tweede reden is waarom de mensen de cijfermethoden die ze hebben geleerd niet of niet efficiënt toepassen - zie de voorbeelden van daarstraks.

> *Geïntegreerd leren van de cijferalgoritmen bij wijze van progressief schematiseren verdient de voorkeur boven geïsoleerd leren bij wijze van progressief compliceren*.

De traditionele methode is: leren cijferen buiten elke context, volgens geprefabriceerde patronen, voortschrijdend volgens de grootte van de getallen, het aantal ‘onthoudingen’, het aantal nul-moeilijkheden, enzovoort. Daar staat dan het progressief schematiseren tegenover. Het begint zo als het in de geschiedenis van de mensheid is begonnen, met de aloude abacus - in het Westen door het cijferen met pen en inkt verdrongen, maar in onze eeuw door rekendidactici herontdekt als beugelabacus met op elke beugel 10 of 20 kralen, zichtbaar of voor het oog verborgen, waar de enkele

kraal van rechts naar links een eenheid, een tiental, een honderdtal voorstelt. De abacus doelt op de materialisering van het tientallig positiestelsel. Het kan trouwens nog primitiever: eenheidscubes, die tot staafjes van 10, plaatjes van 100, cubes van 1000 samengevoegd zijn (figuur 4.5).



figuur 4.5

De abacus voegt aan de tientalligheid van de opbouw het positie-idee toe: na de 1 is de 10, de 100, de 1000 niets nieuws, maar de oude eenheid op een nieuwe plaats met een nieuwe plaatswaarde. Daarvoor moet men het inwisselen leren: voor tien kralen op deze beugel één op zijn linkerbuur en omgekeerd. Zodoende wordt optellen en aftrekken geoefend vóór het op het papier geschiedt. Maar ook op het papier moet het niet meteen volgens de standaardmethode. De leerling kan van de beugelabacus overschrijven wat hij daar met de kralen doet, eerst met streepjes dan met cijfers, tot hij met gedurige verkortingen tenslotte bij de standaardmethode belandt.

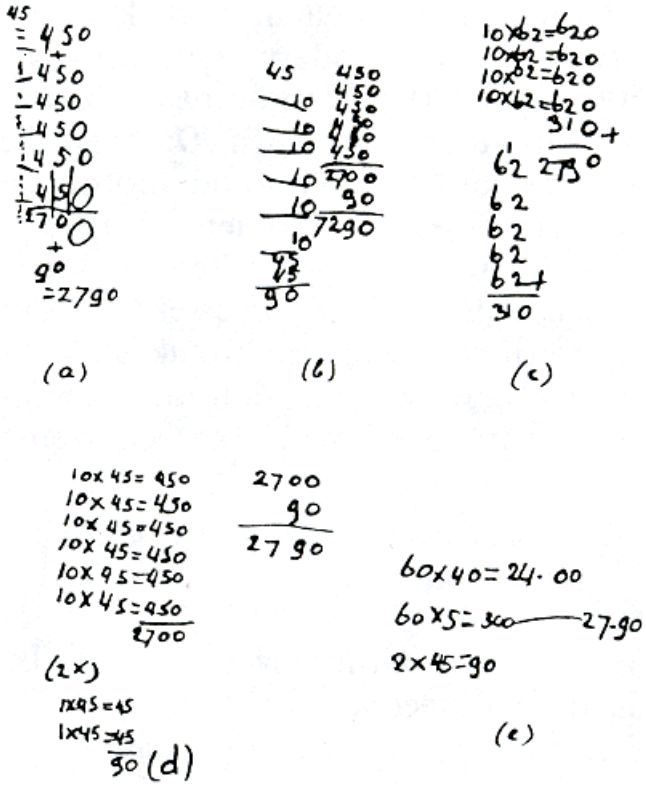
Wat progressief schematiseren is laat zich nog indrukwekkender bij het vermenigvuldigen en delen zien.

Een probleem zoals

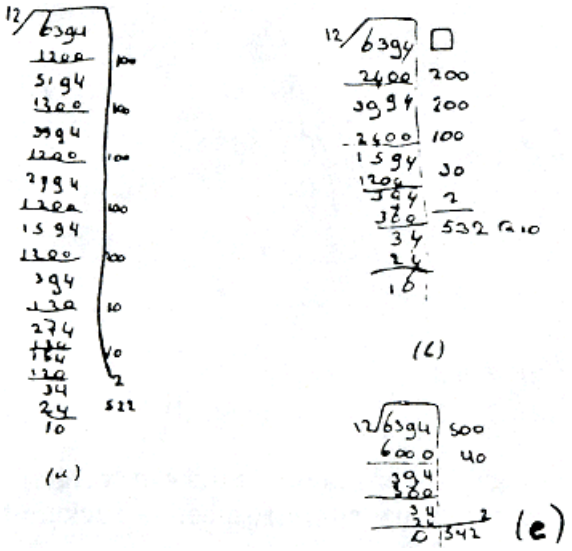
> Een adresboek van 62 bladzijden heeft er 45 per bladzij; hoeveel adressen zijn dit?

is uitdrukkelijk zo geformuleerd dat het woord ‘keer’ er niet in voorkomt en het wordt dan ook allereerst geïnterpreteerd als 62 getallen 45 onder elkaar en dan opgeteld. Neen, als je een beetje slim bent, pak je de 45-en meteen in bosjes van tien: onder de tiende 65 een streep of naast het eerste tiental een accolade, en dan het tweede, het derde tiental enzovoort en dan nog 2 van die vijfen en 2 van de veertigers bij optellen. Ieder doet het op zijn manier (figuur 4.6) - voortgezette verkorting en schematisering waarbij de kennis van de tafels te pas komt (en gelijktijdig verbeterd wordt), met telkens grotere groepen van tientallen in de vermenigvuldiger. De leerlingen zijn op uiteenlopende niveaus van verkorting en schematisering bezig en werken in het ritme dat hun eigen is naar de standaardvorm van het cijferend vermenigvuldigen toe.

Delen is een dergelijk geval. Je noemt het aanvankelijk niet eens delen: ‘324 stickers voor 4 kinderen, maar dan eerlijk, ieder hetzelfde.’ Hoe doe je dat? eerst één bij één uitdelen, maar dat duurt te lang. Dan bij tientallen, bij grotere brokken - geleidelijk wordt het proces verkort en geschematiseerd (figuur 4.7).



figuur 4.6



figuur 4.7

Wederom zijn de kinderen op verschillende niveaus bezig. Komen ze allemaal tenslotte bij de standaardvorm terecht? Het doet er niet toe, want als het menens is met vermenigvuldigen en delen, pak je het rekendoosje, dat tenminste betrouwbaar is, en dank zij het feit dat de bewerkingen in een context zijn geleerd, weet je ook welke toets je in het voorkomend geval moet aanslaan.

Wel, bij de deling krijg je, in plaats van de rest, weleens cijfers achter de komma. Maar wie begrepen heeft wat dit betekent, weet ook de rest te vinden. Want daar komt het op aan: niet op het foutloos cijferen, maar dat er in de loop van het progressief schematiseren en dank zij de context begrepen wordt wat de operatie betekent en welke toets erbij hoort.

Cijferen leren volgens geïntegreerd progressief schematiseren kost de helft van de tijd die bij het geïsoleerd progressief compliceren wordt uitgetrokken. Misslagen zijn zeldzaam; praktisch alle leerlingen bereiken een aanvaardbaar niveau.

Het is een oude ervaring dat pas het cijferen de motivatie schept en de gelegenheid biedt om de tafels goed te leren en te memoriseren. Laten we dit in een breder raam plaatsen.

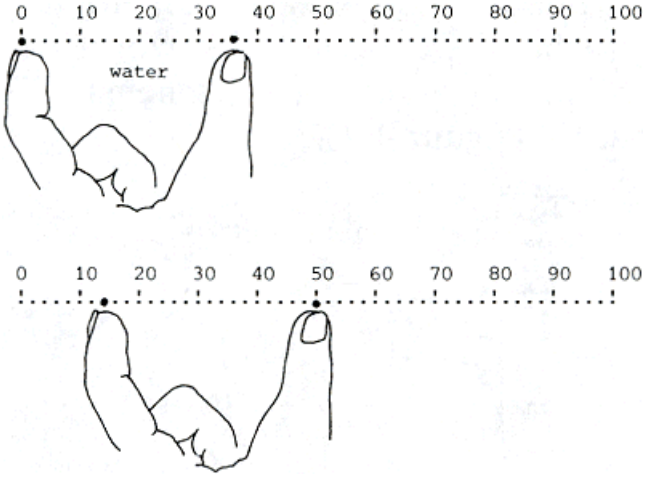
Vroeger werd optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen netjes van elkaar gescheiden onderwezen; trouwens ook het rekenen tot 10, tot 20, tot 100, tot 1000 en dan de rest; breuken, maten, verhoudingen waren eveneens aparte onderwerpen. De behoefte aan wat men als didactisch-mathematische orde aanzag stond voorop. Maar iedereen weet hoe trots kinderen die nauwelijks het rekenen tot 10 beheersen, zijn dat ze al 10 + 10 = 20, of zelfs 20 + 20 = 40 weten, of 3 × 3 = 9 of de tafel van 1 of van 10, misschien ook van 5. Ze koesteren informele methoden die vooruitlopen op het leren van de tafels. Produkten met gelijke factoren (vierkanten) zijn bijzonder aantrekkelijk. Zou men van deze neiging niet moeten profiteren in plaats van ze ter wille van een averechtse systematiek te onderdrukken?

> *Vooruitwijzend leren verdient de voorkeur boven het keurslijf van systematisme*.

Wat is dit, vooruitwijzend leren?[1] Ik heb er al voorbeelden van gegeven.

Laat ik er meer aan toevoegen.

Een van de grote didactische aanwinsten van de laatste decennia is de getallenlijn die uit de hoogste naar de laagste regionen van de wiskunde is afgedaald (figuur 4.8): de getallen vanuit de nul als kilometer- (of centimeter-) palen langs een rechtlijnige weg, die op- of aflopend wordt afgeschreden - eigenlijk maar een getallenstraal, tot je de moed opvat vanuit de nul verder terug te tellen. Oorspronkelijk herbergt de getallenlijn alleen de natuurlijke getallen.



figuur 4.8

1 In het Engels heb ik van ‘anticipating’ of ‘prospective’ gesproken; in het Duits van ‘vorgreifend’. Ik koos die termen met het oog op het later te behandelen terugwijzend (retrospective, rückgreifend) leren.

Later nodigt ze de breuken en irrationale getallen uit om plaats op te nemen. En omgekeerd:

Omdat er zoveel plaats is, daagt de getallenlijn vooruitwijzend tot de uitbreiding van het getallengebied uit.

Het kondigt zich al vroeg aan. Op de liniaal staan alleen de centimeters vermeld; bij de millimeterstreepjes moet men zich getallen bijdenken. Op ‘getallenlijnen’ zoals maatcilinders waar alleen de vijftigers of honderden bijstaan moet je schatten waar bijvoorbeeld 365 zou kunnen staan.

Maar is dit niet al meten? Inderdaad en terecht. Van begin af aan zouden getallen niet alleen als getallen en teltallen maar ook als meetgetallen worden ervaren. Onderzoek wijst uit dat dit voor het begrip van de bewerkingen vooral in allerlei contexten bevorderlijk is.

Een ander voorbeeld. Volgens aloude rekendidactiek worden de tafels gememoriseerd door ze rij na rij op te zeggen. Kinderen wordt wijsgemaakt dat ze om 7 × 8 te beantwoorden de tafel van 8 binnensmonds moeten opzeggen om bij 7 × 8 te stoppen, hetgeen dan hoorbaar wordt geuit. Maar onderzoekers hebben vastgesteld dat kinderen die men hun gang laat gaan, hun eigen flexibeler methoden ontwikkelen: commutativiteit, verdubbelen, halveren, met 10 vermenigvuldigen, op- en afstappen van bekende produkten, en dit al met elkaar gecombineerd, bijvoorbeeld om 7 × 8 te berekenen: 2 × 8 = 16, 2 × 16 = 32, 2 × 32 = 64, 64 - 8 = 56. De slimmen doen het slim. Neen, niet de slimmen, maar de moedigen die grote stappen aandurven. Het is de taak van de onderwijzer te bemoedigen. Hoe het memoriseren van de tafels te organiseren? Er is er onderzoek over verricht.

Ik heb dit voorbeeld hier aangehaald omdat het verdubbelen en halveren zich vroegtijdig aanbiedt als vooruitwijzend leren van vermenigvuldigen en delen. Maar we zagen al dat ook het memoriseren van de tafels vooruitwijzend leren is, want pas bij het cijferen komt de kennis van de tafels echt te pas. Pas door de behoefte bij het cijferen wordt het van buiten kennen goed gemotiveerd en het van buiten leren echt bevorderd. Daarmee zou men rekening kunnen houden door het stimuleren van vooruitwijzend cijferen waar nu het mondeling rekenen overheerst.

Trekt men deze lijn verder door dan biedt een rijkdom van voorbeelden voor vooruitwijzend leren zich aan. Denk aan het kralensnoer van figuur 4.3, waar drie witte en vier zwarte elkaar afwisselen. Hoeveel van iedere kleur zouden het er wel op een lang snoer zijn? Tel maar op:

wit	3	6	9	12	15	18	...
zwart	4	8	12	16	20	24	...

Daar staan ineens twee tafels onder elkaar. En de moedigen voegen er misschien meteen

300	600	1200	...
400	800	1600	...

aan toe. Zodoende ontstaan verhoudingstabellen en ontstaat begrip voor

verhouding. Als 3 zakjes van iets 4 gulden kosten, hoeveel kosten dan...? Als 3 van iets 4 kg wegen, hoeveel wegen dan...? Als de een drie stappen doet op de ander 4, ...? Drie lepels siroop op vier lepels water, wat smaakt net zo?

Waarom heeft de meerderheid der zestienjarigen geen notie van verhoudingen? Omdat ze, indien al, dit natuurlijke verschijnsel te laat hebben leren kennen en dan meteen klaar voor het gebruik en gealgoritmiseerd. Zeker, ook dit is een vereiste, maar dan een waar naar toe moet worden gewerkt in een lange reeks van vooruitwijzende inzichten. Langs deze lijn kunnen ook de breuken worden ontwikkeld, nauw gelieerd aan de verhoudingen, maar daar wil ik nu niet op ingaan omdat breuken een veelzijdiger oorsprong hebben en met al hun bewerkingen veelzijdiger worden toegepast.

Vooruitwijzend leren is de consequentie van het beginsel:

> *Van de informele strategieën van kinderen om problemen op te lossen zou men moeten profiteren om ze de meer formele strategieën te laten leren en gebruiken*.

Sinds er een rekendidactiek bestaat onderwijst men kinderen het overschrijden, van de tientallen van onderen of boven met de ‘ruksgewijze’ aanvulling of splitsing: 8 + 5 = 8 + (2 + 3) = (8 + 2) + 3 = 13 en 13 - 5 = 13 -3 -2 = 10 - 2 = 8. Ondertussen is al lang bekend dat ook leerlingen die precies weten hoe het moet, het op hún manier doen. Met door- en terugtellen voelen ze zich veiliger dan met de voorgeschreven ingewikkelde methode, en dat blijkt als men ze eerlijk laat vertellen hoe ze het hebben gedaan. (Terugtellen gaat langzamer dan vooruit en daardoor kunnen tijdsduur en moeilijkheid van het aftrekken worden beïnvloed.) Uiteindelijk - zeg tegen het einde van het derde leerjaar - kennen ze de optellingen en aftrekkingen tot 20 toch van buiten. Doet het er dan nog toe hoe ze die hebben geleerd? Of zou je ze de gemakzucht, de angst voor het onzekere bijtijds afwennen? Een pedagogische vraag!

Toch zijn er gegronde redenen en gelegenheden om de kinderen tegemoet te komen en het oplossen in eigen stijl zelfs aan te moedigen. Het memoriseren van de tafels waar ik het eerder over had is een goed voorbeeld waar de flexibiliteit van het kinderlijk denken de voorkeur verdient boven het opgelegde stramien.

Aan de andere kant kan het ook nadelig zijn als men de leerlingen van het informele niet naar het meer formele leidt. Aan wie zo'n vraagstuk als van de 216 km waarvan 82 km al zijn afgelegd aanvullend in plaats van aftrekkend blijft oplossen, is de min-toets van het rekendoosje niet besteed; en meer algemeen, informele methoden kunnen de efficiëntie in de weg staan, maar als opstap naar de meer formele zijn ze wegens hun inzichtelijkheid van waarde.

Allebei zijn nodig: inzicht en automatismen. Automatismen moeten inzichtelijk worden verworven. Maar dat is niet voldoende. Automatismen, hoewel inzichtelijk geleerd, dreigen de bronnen van dat inzicht te verstoppen. Vraag maar waarom je om met 100 te vermenigvuldigen ‘twee nullen aan-

hangt'. Ook al is het inzichtelijk geleerd, het is een automatisme geworden. Het is zo, het moet zo, en zelfs de vraag waarom, wordt niet begrepen - daar zou iemand nog eens kunnen vragen, waarom heet een boom boom? De dreiging dat automatismen de bronnen van inzicht verstoppen, zou kunnen worden bezworen door wat ik zou noemen terugwijzend als tegenhanger van vooruitwijzend leren. Bij elke gelegenheid en op elk hoger niveau zou men oude problemen van de meest elementaire af aan opnieuw moeten opgrijpen en van nieuwe kanten benaderen.

> *Bronnen van inzicht moeten open worden gehouden door terugwijzend leren*.

Opmerking:
De denkbeelden van geïntegreerd progressief schematiseren en vooruitwijzend leren werden door leden van het toenmalige IOWO-team opgevat en ontwikkeld. Zie bijvoorbeeld:

> A. Dekker, H. ter Heege, A. Treffers: *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*.
> L. Streefland: Search for the roots of ratio - some thoughts on the long term learning process. Te verschijnen in: *Educational Studies in Mathematics*.

Terug- en vooruitblik

Zeven wiskundig-didactische principes zijn hier ten tonele gebracht - duidelijk genoeg om ze één voor één te herhalen. Maar neem ze dan één voor één om rekenmethoden op te toetsen en onderwijsvoorbeelden voor te bedenken. Bijvoorbeeld, hoeveel ervan kunt u naar aanleiding van het volgende opstel toepassen?

5. Oppervlakte als verschijnsel benaderd

1. Naar het meten toe

1.1

Hoe meet je oppervlakten? Of allereerst: hoe méét je? Oppervlakte lijkt iets van de bovenste plank, lengte maal breedte, iets waarbij verondersteld wordt dat je al kunt vermenigvuldigen - zo lijkt het.

Dus: hoe meet je? Hoe meet je wát?

Lengte lijkt het eenvoudigst om te meten - naar gelang van de gerichtheid noem je het ook wel breedte, hoogte, diepte, dikte, maar laten we het bij de term lengte laten. Gewicht lijkt ingewikkelder, hoeveelheid vloeistof idem, maar met moderne weegschalen en met maatglazen wordt zoiets praktisch tot lengtemeting herleid. Snelheid lijkt nog ingewikkelder, maar de snelheidsmeter van een auto maakt ook dit gemakkelijk.

Meten is het antwoord op vragen als: hoe lang, hoe zwaar, hoeveel, hoe snel? Vragen, die nogal ingewikkelde meetprocedures vereisen. Maar je kunt eenvoudiger beginnen. Aan het meten gaat als meer fundamentele werkzaamheid het *vergelijken* vooraf: twee zaken zijn even lang, zwaar, veel, snel. Of: de ene is langer, zwaarder, meer, sneller, dan de andere.

En dan hoef ik nog lang niet aan vragen te denken als: hoevéél langer, zwaarder, meer, sneller?

Of: hoeveel keer zo lang, zwaar, veel, snel?

1.2

Het vergelijken gaat aan het eigenlijke meten vooraf. Maar wat heb ik aan het vergelijken als ik niet tevens meet? Heel veel. Je kunt er zonder moeite voorbeelden voor bedenken. Bijvoorbeeld: voorwerpen rangschikken volgens lengte, gewicht, hoeveelheid; sportprestaties volgens snelheid. Maar er is een nog fundamenteler motief om lengte, gewicht, hoeveelheid, te vergelijken, namelijk het *eerlijk verdelen* van, zeg: dropveter, koek, limonade.

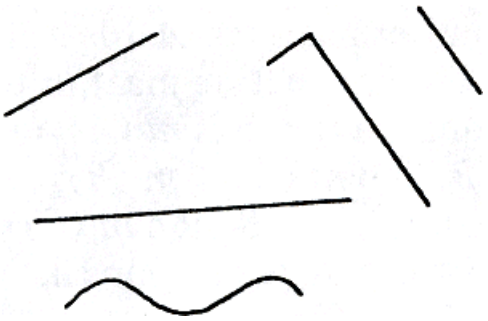
Je begint zo maar te verdelen, zeg: in drie porties, op goed geluk; van wie meer heeft neem je iets af en je verdeelt het weer, en zo ga je door tot elk evenveel heeft. Dit eerlijk verdelen vereist dat je kunt vergelijken: heeft er één meer, hebben ze nú evenveel?

1.3

Om te vergelijken heb je twee relaties nodig: *equivalentie* en *orde*.

Een deel is minder dan het geheel - dat schept een *orde*, maar daarmee kom je er niet. Het gaat ook om het vergelijken qua lengte, gewicht, hoeveelheid, van voorwerpen die niet het ene deel van het andere hoeven te zijn. Om te kunnen vergelijken, moet je voor voorwerpen plaatsvervangers kunnen aanwijzen, die evenveel waard zijn. Wiskundig gesproken: *equivalent*.

Hoe vergelijk je de in figuur 5.1 aangeduide lengten? Je brengt de voorwerpen bij elkaar; dat helpt als ze rechtlijnig zijn - wie buiten de ander uitsteekt, is langer. Zijn ze geknikt of gekromd, dan moet je ze eerst recht



figuur 5.1

trekken, alsvorens ze bij elkaar te brengen en te vergelijken, of je moet het recht voorwerp om het geknikte of gekromde heenbuigen.

Zodoende hebben we met twee lengtebehoudende bewerkingen kennisgemaakt. Voorwerpen worden qua lengte vergeleken door ze:

- als vaste lichamen te *verplaatsen* (liniaal);
- als buigzame lichamen te *buigen* (duimstok, meetlint, touwtje).

Als derde voeg je er nog aan toe:

- het *knippen en plakken*; een bewerking, waarbij je onderdelen kunt uitwisselen, terwijl het voorwerp even lang blijft.

1.4

Hóe lang? - was nog steeds niet aan de orde. Hoe kan een antwoord op die vraag luiden? Bijvoorbeeld: drie stappen. Maar als het om een rechte afstand gaat, moeten het wel stappen recht achter elkaar zijn.

Voor je aan het meten toe bent, moet je weten hoe je maatstaven aan elkaar zet. Er is een samenstellen van voorwerpen qua lengte, gewicht, hoeveelheid, een *optelling* die nog niet numeriek hoeft te worden opgevat; een ‘samen’ zoals de uitspraken:

- *a* en *b* samen zijn even lang (zwaar, veel) als *c*;
- *a* en *b* samen zijn langer (zwaarder, meer) dan *c*.

1.5

We resumeren: aan het meten gaat vooraf het kennen van relaties van *equivalentie, orde* en *een optelling*.

En dan kun je trachten te meten. Een standaardvoorwerp *e* wordt gekozen: een maatstaf of eenheid. Om een voorwerp *a* te meten kijk je hoe vaak *e* erin opgaat, dat wil zeggen: je telt met *e* equivalente voorwerpen zo vaak op tot *a* uitgeput is. Lukt het, dan is *a* met *e* gemeten; *a* is een veelvoud van *e*. Lukt het niet, dan moet er iets met de rest gebeuren: *e* wordt door een deeleenheid vervangen, zeg: een tiende ervan, waarmee je de rest tracht uit te putten, om *a* in helen en tienden als veelvoud van *e* uit te drukken. Lukt het weer maar op een rest na, dan zet je het

proces met honderdsten, duizendsten, ... voort, tot je er genoeg van hebt. Zo gaat het *tientallig*, maar let wel: het mag ook anders.

Bij de drie principes is er een bijgekomen: *onbeperkte deelbaarheid*.

Meten is *uitputten met een eenheid of delen ervan*.

De maat van een voorwerp is een *positief veelvoud van een eenheid*.

1.6

Nu we eindelijk aan meten en maat toe zijn, laten we voor een ogenblik de te meten voorwerpen (bijvoorbeeld lange voorwerpen) door hoofdletters aanduiden en hun maat (bijvoorbeeld de lengte) door het functie-

symbool *m*. Dus: *m* (*A*) zou de maat van *A* (de lengte van stok *A*) zijn. Ons rest nu de principes van vroeger met de maat *m* te confronteren:

- *equivalentie*: als *A* en *B* equivalent zijn is *m* (*A*) = *m* (*B*);
- *orde*: als *A* minder is dan *B*, dan *m* (*A*) < *m* (*B*);
- *optelling*: is *C* samengesteld uit *A* en *B*, dan *m* (*C*) = *m* (*A*) + *m* (*B*);
- *deelbaarheid*: bij een voorwerp *A* is er voor elk natuurlijk getal *n* een voorwerp *B* zodat *m* (*B*) = 1/*n m* (*A*).

1.7

Oppervlakte kwam onder onze voorbeelden nog niet voor, maar alles wat aan de orde was, geldt ook voor oppervlakte. Alleen komt het hier veel gevarieerder en geschakeerder voor de dag. Oppervlakte is voor het meten een rijkere context dan lengte, gewicht, hoeveelheid. En daardoor kan oppervlakte, didactisch gezien, een even goed uitgangspunt op de weg naar het meten toe zijn als lengte - of misschien zelfs een betere. Tenminste, als je als leerproces een weg ernaar toe wilt bewandelen en niet plompverloren wilt starten met: oppervlakte = lengte maal breedte. De weg naar oppervlakte kan beginnen vóór de wetenschap van het ‘maal-nemen’ aan de orde is, zelfs vóór lengte en breedte.

1.8

Oppervlakte is een grootheid om voorwerpen mee te meten van een verscheidenheid die gevarieerder lijkt dan bij welke andere grootheid ook:

- een vel of rol papier of karton;
- een plaat hout of hardboard;
- een rol of coupon stof;
- een huid leer;
- een voetbalveld of zwembad;
- een stuk bouwland of bos;
- een perceel om te bebouwen;
- het territoir van een staat en zijn onderdelen naar aard van gebruik;
- het bronnengebied van een rivier;
- de spiegel van een meer of zee;
- een muur om te schilderen of te pleisteren;
- een vloer om te beleggen of te parketteren;
- een kantoorvloer of raamoppervlak om schoon te maken;
- een straat om te plaveien of te asfalteren;
- een dak om te dekken;
- een weiland om te maaien;
- een akker om te ploegen en te bezaaien, of te beplanten;
- een huidoppervlak om zijn warmteuitwisseling te kennen;
- een huidoppervlak om nauw of luchtig te bekleden;
- het bladerenoppervlak van een bos om zijn verdamping en gasuitwisseling te kennen.

En verder:

- oppervlakken van meetkundige figuren, vlakke, afwikkelbare en niet-afwikkelbare, al dan niet in formules uitdrukbare;
  als zodanig van belang, of als hulpmiddel om lengten in andere uit te drukken (zoals bij de stelling van Pythagoras).

1.9

Net als voor andere grootheden is voor het meten van oppervlakte vereist: equivalentie, orde, optelling, onbeperkte deelbaarheid.

En meten is in laatste instantie: uitputten met een eenheid of delen ervan. Maar net als bij de andere grootheden vindt dat meten pas aan het einde van het leerproces plaats. Net als bij andere grootheden vloeit de equivalentie voort uit: verplaatsingen, buigingen, knip-plaktransformaties.

Maar vergeleken bij lengte vertoont oppervlakte een grotere geschakeerdheid, een grotere rijkdom, wat de aard van optellen en knip-plaktransformaties betreft.

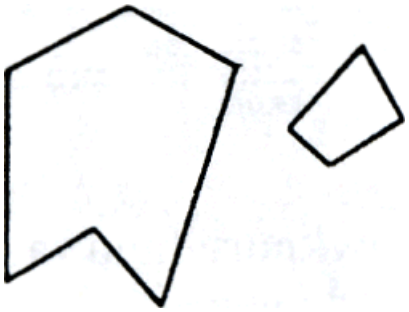
Het samenstellen van lange voorwerpen is, op verwisseling van onderdelen na, ondubbelzinnig bepaald, terwijl je voorwerpen waaraan een oppervlakte wordt toegekend, op een zeer gevarieerde manier kunt samenstellen.

Knip-plakprocedures kunnen vlakke voorwerpen onherkenbaar veranderen - tangrampuzzelaars weten er alles van.

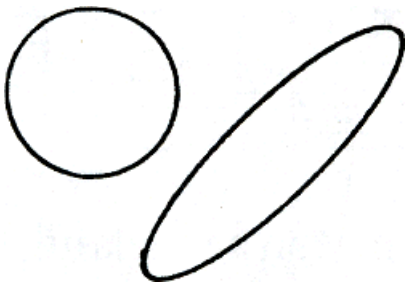
2. Oppervlakte en het lastige ervan

2.1

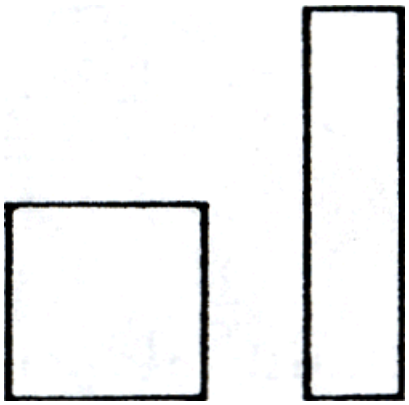
Het begint dus ook bij oppervlakte weer met het vergelijken: wie is groter, wie kleiner? Bij figuur 5.2 is het zó te zien:



figuur 5.2



figuur 5.3



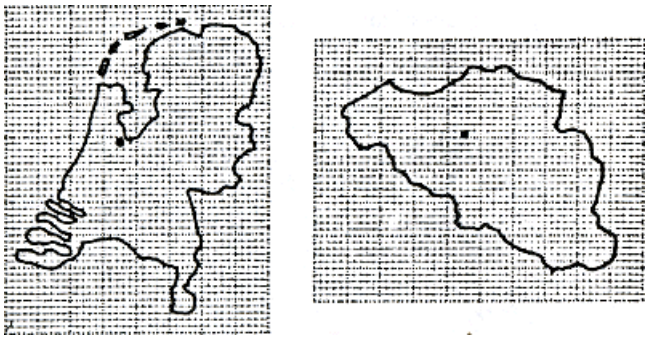
figuur 5.4

De ene figuur is binnen de andere te plaatsen. Bij figuur 5.3 lukt het niet direct, maar wel nadat de smalle figuur in een aantal stukken is geknipt. Figuur 5.4 lijkt moeilijker; het is verleidelijk naar lengte en breedte te kijken, maar met knippen en plakken kan het ook lukken. Tenslotte: hoe moet het met figuur 5.5? Met lengte maal breedte lukt het niet. Toch hebben ze vast

figuur 5.5

en zeker een oppervlakte, want het zijn plaatjes van Nederland en België op schaal - landen die volgens de aardrijkskundeboeken zo en zoveel vierkante kilometers meten, en vierkante kilometers is een oppervlaktemaat; een vierkant van 1 km lang en breed.

Dat is dus een eenheid om oppervlakte mee te meten: een vierkant met een bepaalde zijde. Van zo'n eenheid hebben we equivalente representanten nodig; congruente vierkanten, en die vinden we het gemakkelijkst in een rooster, zeg: van millimeterpapier - roostervierkanten van cm^2, onderverdeeld elk in 100 mm^2 en, als u het zich kunt verbeelden, in honderdsten, tienduizendsten, ... ervan. Daar leg je de plaatjes van figuur 5.5 op en dan ga je tellen hoeveel hokjes in elk van de plaatjes zitten (figuur 5.6).



figuur 5.6

We zijn dus al haast bij het meten aangeland. Ook de nauwkeurigheid van de meetprocedure laat zich verantwoorden. We benaderen de gegeven figuur:

- *van binnen*; dat wil zeggen: als som van de roostervierkantjes, die erin zitten;
- *van buiten*; dat wil zeggen: als som van de roostervierkantjes, die er iets mee gemeen hebben.

Naar mate van roosterverfijning verbeteren de benaderingen van binnen en van buiten. Groeien ze op den duur naar elkaar toe om uiteindelijk iets te bepalen dat terecht ‘oppervlakte van de figuur’ mag heten? Een lastige vraag, waar je in alle eerlijkheid ja noch nee op kunt zeggen. Het hangt van de figuur af. Om de nieuwsgierige gerust te stellen: voor wat je gewoon bent meetkundige figuren te noemen, luidt het antwoord: ja. En om niet te gauw gerust te stellen: dit antwoord vereist een bewijs dat niet gemakkelijk is.

Ziedaar punt nummer één, waarom oppervlakte een lastpak kan zijn.

2.2

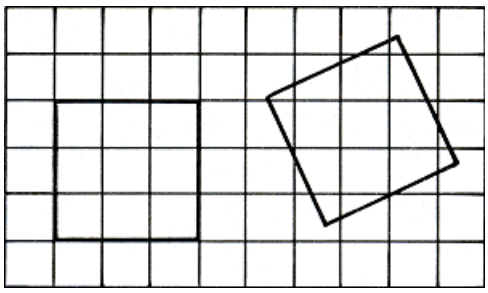
Het kan nog lastiger. We hebben de plaatjes van figuur 5.5 zo maar op het rooster in figuur 5.6 neergelegd. Door de betrokken hokjes te tellen wordt de oppervlakte benaderd. Maar wat nu, als je de plaatjes anders neerlegt? Komt er dan hetzelfde uit - ik bedoel met voortgaande verfijning van het rooster?

Ik zeg iet iets eenvoudiger: teken een vierkant van drie-bij-drie rechtop-

staande op het rooster. Verschuif hem evenwijdig en tel weer de hokjes. Er zal wel hetzelfde uitkomen, zeker bij gedurige verfijning. Maar ga hem nu draaien zodat hij schuin op het rooster ligt (figuur 5.7). Klopt het dan ook nog? De twee vierkanten, de rechtopstaande en de schuine, zijn congruent, ze zouden dezelfde oppervlakte moeten hebben - het hokjes tellen zou op den duur hetzelfde moeten opleveren.

Ter geruststelling: het is ook zo. En om u weer niet te gauw gerust te stellen: je moet er moeite aan besteden om het gemakkelijk te bewijzen en zelfs dat gemakkelijke bewijs is nogal moeilijk.

Ziedaar punt nummer twee, waarom oppervlakte een lastpak kan zijn.



figuur 5.7

3. Moet het zo lastig?

3.1

Moet dit nu zo - een *vierkant als maatstaf* om oppervlakten te meten of ook maar te vergelijken? Wel, zo iets is - en dan in roostergedaante - geschikt om onregelmatig kromlijnig begrensde figuren uit te putten, maar voor rechtlijnig begrensde of regelmatige figuren lijkt het een averechtse procedure.

Twee krasse voorbeelden:

- een vierkant, in twee congruente delen verdeeld, geeft aanleiding tot een deelfiguur, die direct (zonder uitputten met vierkantjes) als helft van het vierkant herkenbaar is;

figuur 5.8

- een cirkelschijf is kennelijk beter met regelmatige veelhoeken dan met vierkantjes uit te putten.

Het eerlijk verdelen laat zich bij alle grootheden tot een *numerieke* deling terugbrengen, doordat het te verdelen voorwerp gemeten wordt. Het ligt voor de hand deze weg in te slaan als de meetprocedure eenvoudig genoeg is, zoals meestal het geval is bij lengten, gewichten, tijden, vloeistofhoeveelheden.

Het meten van oppervlakten (en vaste inhouden) is meestal ingewikkelder en kan zelfs heel moeilijk zijn. Het ligt dan voor de hand te profiteren van een eventuele meetkundige structuur van het te verdelen object. Er zijn tal

van manieren om een vierkant, een cirkelschijf, een cilinderoppervlak, in drie congruente delen te verdelen. Elke manier levert ook een eerlijke verdeling van de oppervlakte op. Vertoont het te verdelen voorwerp minder of geen meetkundige structuur, dan zal men veelal de eerlijke verdeling bij wijze van schatting prefereren boven een ingewikkelde meetprocedure.

figuur 5.9

3.2

Het hoeft dus niet per se zo moeilijk - met starre roosters en benaderingen. Rechtlijnig begrensde figuren kunnen we best met knip-plakprocedures aan.

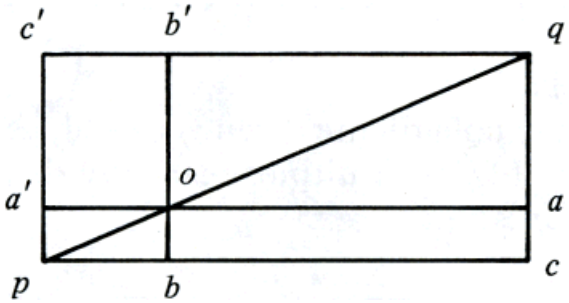
We beginnen met rechthoeken. De formule:

oppervlakte = lengte maal breedte,

(het is toch maar een definitie) laat zich rechtvaardigen door knip-plakprocedures en congruente driehoeken.

Immers (figuur 5.10), door van de congruente grote driehoek *pqc* en *pqc′* de paren congruente kleine driehoeken *pob, qoa* en *poa′, qob′* af te trekken, zie ik van de resterende rechthoeken:

opp *oacb* = opp *oc′c′b′*.



figuur 5.10

aan de andere kant:

oa : oa′ = ob′ : ob.

Oftewel:

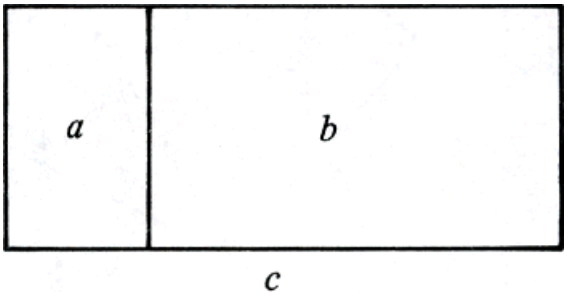
oa·ob = oa′·ob′.

Dus: twee rechthoeken hebben dan en slechts dan dezelfde oppervlakte als ze in de produkten van de zijden overeenstemmen.

Het produkt van de zijden kenmerkt de oppervlakten van rechthoeken. Moeten rechthoeken dus niet alleen worden vergeleken maar ook gemeten, dan dient ‘lengte maal breedte’ zich als maat aan en deze maat - oppervlakte genaamd - voldoet aan wat we in 1.6 als eisen formuleerden:

- *equivalentie*: voor congruente rechthoeken *a* en *b* is opp *a* = opp *b*;
- *orde*: zit rechthoek *a* in rechthoek *b*, dan is opp *a* < opp *b*;

- *optelling*: zet je twee geschikte rechthoeken *a, b* langs een zijde zo aan elkaar dat weer een rechthoek *c* ontstaat, dan is opp *c* = opp *a* + opp *b*;



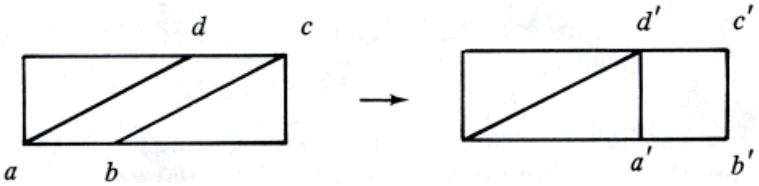
figuur 5.11

- *deelbaarheid*: deel je een zijde van rechthoek *a* in *n* gelijke delen, dan ontstaat hierop een rechthoek *b* zodat opp *b* = 1/*n* opp *a*.

3.3

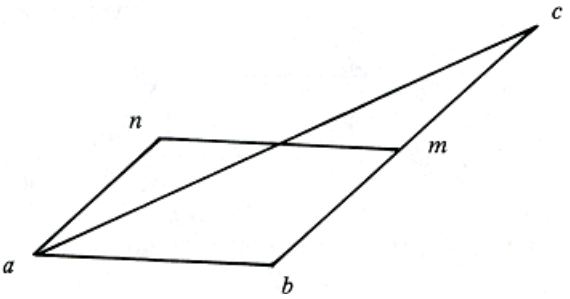
Met knip-plakprocedures zijn willekeurige veelhoeken qua oppervlakte tot rechthoeken te herleiden.

Allereerst de parallellogrammen. Figuur 5.12 laat dien hoe het parallellogram



figuur 5.12

abcd door aanplakken en weer wegknippen van driehoeken tot de rechthoek *a′b′c′d′* herleid wordt.

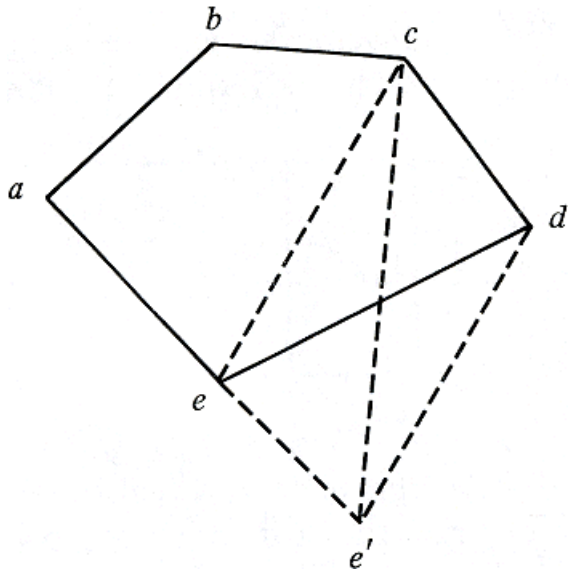


figuur 5.13

Dan de driehoeken (figuur 5.13): *abc* herleid tot het parallellogram *abmn* door wegknippen en toevoegen van een driehoek. Tevens blijkt hieruit dat elke driehoek in elke andere met gelijke basis en hoogte kan worden omgezet door plak- en knipprocedures.

Tenslotte kan evenzo een *n*-hoek (*abcde*) tot een (*n*-l)-hoek (*abce′*) worden herleid, om uiteindelijk bij een driehoek te belanden.

Het essentiële van deze beschouwing is, dat voor veelhoeken gelijkheid en vergelijking van oppervlakte door knip-plakprocedures, zonder tussenkomst van roosters en benaderingsprocessen, kan worden gedefinieerd. Elke veel-



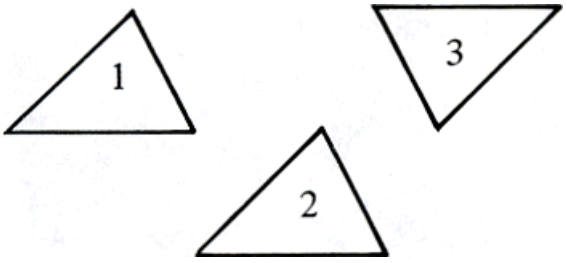
figuur 5.14

hoek is qua oppervlakte tot een rechthoek en nog wel met gegeven basis herleidbaar, en door dan de hoogten te vergelijken, kan men uiteindelijk de gegeven veelhoeken qua oppervlakte *vergelijken*.

Men kan op die manier, tot een rechthoek teruggaande, oppervlakte ook *definiëren*. En wederom blijkt, zoals in **3.2** bij de rechthoeken, aan de eisen uit **1.6** voldaan te zijn.

3.4

Een aardigheid waaraan ik niet voorbij mag gaan! Uiteindelijk kan men zich beperken tot het afknippen en weer bijplakken van driehoeken en wat het overplaatsen van deze stukken betreft, kan men zich beperken tot translaties en puntspiegelingen.



figuur 5.15

Dus: een driehoek wordt uit een positie 1 in een positie 2 en 3 verplaatst - algemener congruenties hoeven er niet aan te pas te komen.

3.5

Om eerlijk te bekennen: de jubelkreet in **3.3** was prematuur. Los van de eerdere definitie van oppervlakte is het niet evident of knip-plakprocedures ondubbelzinnig tot hetzelfde resultaat leiden. Zou één zelfde veelhoek door middel van twee

verschillende knip-plakprocedures niet tot rechthoeken met, zeg: *dezelfde* basis, maar *verschillende* hoogten herleid kunnen worden? Of anders gezegd: zou een rechthoek niet door knippen en plakken uiteindelijk in een kleinere overgevoerd kunnen worden?

Het antwoord luidt ontkennend, maar dat dit zo is, is allesbehalve evident en een direct bewijs hiervoor - onafhankelijk van benaderingsprocedures - vereist niet-triviale kunstgrepen. Het is kenmerkend, dat Hilbert's *Grundlagen der Geometrie* een aantal edities moest doorlopen, alvorens er een

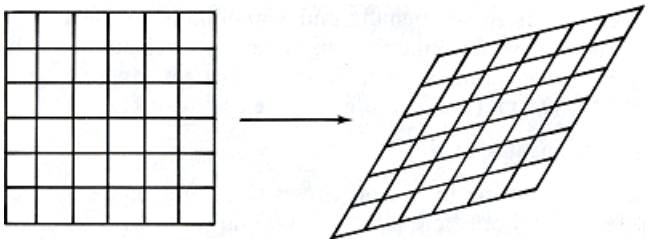
redelijk bewijs voor dit feit in verscheen. Een redelijk bewijs, maar toch zo lastig, dat ik het niet durf reproduceren.

Ziedaar punt nummer drie, waarom oppervlakte een lastpak kan zijn.

4. Oppervlakte en afbeeldingen

De afbeeldingen in en van het vlak waarbij alle afstanden behouden blijven, waarbij het vlak zich als het ware als een vast lichaam gedraagt, heten *verplaatsingen* of *congruenties* - verschuivingen, draaiingen, spiegelingen vallen eronder. Dat de verplaatsingen ook de oppervlakte van vlakke figuren ongewijzigd laten, was een eis die we al in 1.9 tegenkwamen.

Er bestaan echter meer afbeeldingen die de oppervlakten ongewijzigd laten. Neem bijvoorbeeld de zogenaamde *affiniteiten*. Deze afbeeldingen laten rechte lijnen rechtlijnig en parallellen parallel - zie figuur 5.16 waar een rooster samen met zijn affien beeld is aangeduid.



figuur 5.16

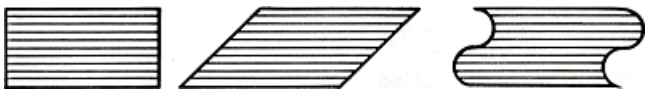
Bij zo'n affiniteit worden alle oppervlakten met dezelfde factor vermenigvuldigd. Er zijn er waarvoor deze factor juist één is: de zogenaamde *speciale affiniteiten*.

Dit zijn echter lang niet de enige afbeeldingen die de oppervlakte behouden.

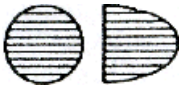
Een soort oppervlaktegetrouwe afbeelding waaraan veel te weinig aandacht wordt geschonken, is het *scheren*.

Men vatte een vlakke figuur op als gelaagd in evenwijdige lijnstukken, om deze langs elkaar te laten glijden. (In de mechanica noem je zoiets scheren en daaruit neem ik de term over.)

Bij het scheren blijven oppervlakten ongewijzigd. Dit is aanschouwelijk evident. Men schrijft aan de rechtlijnige lagen een dikte toe, dus men denkt zich de figuur uit rechthoekige staafjes opgebouwd, die op elkaar glijden. Voor deze figuur is het behoud van oppervlakte een elementair knip-plakverschijnsel, dat met het steeds maar dunner worden van de lagen wordt meegenomen.



figuur 5.17



figuur 5.18

5. Didactische conclusies

5.1

Bij oppervlakte gaapt er een kloof tussen het aanschouwelijk evidente - het mentale object - en het streng wiskundig beredeneerde begrip. Het is duidelijk dat op school, zelfs op het hoogste niveau, alleen kleine stapjes mogelijk zijn naar mathematische begripsvorming toe. Didactici van de wiskunde, voor wie strenge begripsvorming het doelwit van wiskundeonderwijs is, zullen het onderwerp oppervlakte overslaan of alleen in uiterste verschraling toelaten. Wie het aanschouwelijk tot zijn recht wil laten komen, zal dit onderwerp juist aangrijpen.

Achtjarigen hebben zeker al een welgefundeerd aanschouwelijk idee van oppervlakte. Ze voldoen zonder aarzelen aan de opdracht:

> Kleur de helft (een derde) van die figuur rood,

indien de figuur enige regelmatigheid vertoont, zoals een rechthoek, vierkant, cirkel, cirkelsector. Ook leveren zij naar wens gevarieerde oplossingen voor hetzelfde vraagstuk. Bij onregelmatige figuren slagen ze er eveneens in de opgave schattenderwijs op te lossen.

Bij tienjarigen is het benaderend vergelijken en meten van oppervlakten door roosteroverdekkingen, een teken van verdiept inzicht in het onderwerp. De waarnemingen wijzen op een vrij genuanceerd mentaal object oppervlakte. Pas met de formule voor de rechthoek:

> lengte maal breedte,

zet de verschraling in het begrijpen van oppervlakte in, die de bovenbouw van de basisschool kenmerkt en waaraan het voortgezet onderwijs zelden of nooit een verlevendigend element toevoegd. Voor zover er dan toch wiskunde van oppervlakte bedreven wordt, is instap, methode en onderwerp vaak vervreemd van de corresponderende mentale objecten, waarmee het fenomeen oppervlakte in het dagelijks leven en in wiskundige toepassingen wordt begrepen.

5.2

Oppervlakte laat zich veelvuldig aangrijpen. Ik som de toegangen resumerend op:

- eerlijk verdelen:
    - door van regelmatigheden te profiteren;
    - bij wijze van schatten;
    - bij wijze van meten;

- vergelijken:
    - door in elkaar bevat zijn;
    - door knip-plakprocedures;
    - bij wijze van schatten;
    - bij wijze van meten;
    - door middel van afbeeldingen; dat wil zeggen: verplaatsingen, affiniteiten, scheringen;

- meten:

- door uitputten met eenheden;
    - met telkens verfijnde deeleenheden;

- door benaderingen van binnen en buiten;
  - met vaste roosters;
  - door aangepaste figuren;

- door herleiding met knip-plakprocedures;
- door middel van vaste formules;
- door middel van afbeeldingen; dat wil zeggen: verplaatsingen, affiniteiten, scheringen

Uit didactisch oogpunt zijn al deze toegangen aanvaardbaar, de ene met meer, de ander met minder gewicht, en het laat zich niet rechtvaardigen als men zich ter wille van de zuiverheid der methode tot één zou beperken. Integendeel, men zal zoveel mogelijk profiteren van de rijkdom. En dit niettegenstaande de didactische onmogelijkheid van het meer dan lokaal ordenen van dit begrippenveld; dat wil zeggen van:

- het stellen van de vraag naar inwendige en uitwendige consistentie van de onderscheiden toegangen;
- het afpalen van bereiken van geldigheid van die toegangen;
- de logische rechtvaardiging van die toegangen in hun onderlinge verband.

5.3

Dit betekent niet een zich beperken tot een geheel naïeve en onkritische activiteit in een veld, dat immers vol is van voetangels en klemmen. Zodra grootheden in het geding zijn, is er kans op verwarringen: afstanden, tijden, snelheden, meters per seconde en seconden per meter, benzineverbruik per 100 km en afgelegde weg per liter, zijn er voorbeelden van. Voor de constitutie van grootheden als mentale objecten is ook vereist, dat zij met andere geconfronteerd worden. Bij oppervlakte is de omtrek de grote misleider. Op hetzelfde ogenblik dat kinderen er blijk van geven, een oppervlakte eerlijk te kunnen verdelen, laten ze zich toch maar door welgekozen voorbeelden misleiden, oppervlakten van figuren naar hun lineaire afmetingen te beoordelen.

figuur 5.19

Figuur 5.19 toont een situatie, waarin sommigen aan de rechter figuur een grotere oppervlakte toekennen dan aan de linker, wegens de grotere omtrek, terwijl anderen de ‘smalheid’ van de figuur (gemeten als afstand van de schuine parallellen) tot de omgekeerde conclusie verleidt. Dat men de oppervlakte van de Peloponnesos niet kan bepalen door er omheen te zeilen, vond Plato waard om te beklemtonen. Galilei's ‘zak’ aan verschillende kanten dichtgenaaid, om binnen dezelfde oppervlakte verschillende inhouden op te nemen, is een ander historisch voorbeeld dat hier aangehaald mag worden.

Voor de constitutie van het mentaal object oppervlakte zijn ook vereist:

- voorbeelden van figuren die hun (misleidende) afwijkingen in lineaire afmetingen ten spijt, dezelfde oppervlakte hebben, zoals de parallellogram-

men met gelijke basis en hoogte;
- voorbeelden van figuren die hun (misleidende) overeenstemming in lineaire afmetingen ten spijt, verschillende oppervlakte hebben, zoals verschillende door buiging uit elkaar ontstaande ruiten (figuur 5.20).

figuur 5.20

Vooral extreme gevallen zijn instructief:
- in figuur 5.19, waar het parallellogram steeds langer en smaller wordt en desniettemin qua oppervlakte hetzelfde blijft;
- in figuur 5.20, waar de ruit tenslotte samenklapt, om geen oppervlakte meer in te sluiten.

Met een gegeven omtrek *willekeurig weinig* oppervlakte in te sluiten is - achteraf bekeken - geen kunst. Bij de constitutie van het mentaal object oppervlakte dringt zich als het ware vanzelf het verschijnsel op dat met een gegeven omtrek niet *willekeurig veel* oppervlakte is in te sluiten. Voor de door een gegeven omtrek in te sluiten oppervlakte is er een bovengrens, die trouwens naar gelang van de tot mededinging opgeroepen figuren kan verschillen.

Dit leidt dan tot de *isoperimetrische vraag*, onder een soort figuren met dezelfde omtrek die met de grootste oppervlakte te vinden. Dat onder de rechthoeken met gelijke omtrek het vierkant de grootste is, is betrekkelijk gemakkelijk in te zien. Dat onder *n*-hoeken van gelijke omtrek de regelmatige de grootste is, lijkt vanzelfsprekend, maar is minder gemakkelijk te bewijzen als men van het geval *n = 3* afziet. Dat van alle vlakke figuren de cirkel de isoperimetrische eigenschap bezit, lijkt evenzeer evident, maar vereist - om te bewijzen - heel wat wiskunde.

Omtrek en oppervlakte staan enigszins, maar niet geheel los van elkaar; de omtrek legt aan de oppervlakte een bovengrens op. Het analoge een dimensie hoger, in de relatie tussen oppervlakte en inhoud, is wat beide aspecten aangaat, een belangrijke factor van verklaring en beheersing in natuur en techniek. Om uitwisseling van warmte of stof met de buitenwereld te bevorderen scheppen natuur of mens, waar het gewenst is, excessief grote oppervlakten op een kleine ruimte; om deze uitwisseling in andere gevallen tegen te gaan worden vormen aangenomen en geschapen, die zo weinig mogelijk oppervlakte vertonen als met andere gegevens te verenigen valt.

De vraag, die aan de isoperimetrische beantwoordt - een dimensie hoger -: bepaal met een gegeven oppervlakte een zo groot mogelijke inhoud, is mathematisch zelfs nog moeilijker te behandelen dan de isoperimetrische, hoewel het ook hier evident lijkt, dat grote regelmatigheid, in het bijzonder de regelmatigheid van het boloppervlak, een grotere inhoud bij dezelfde oppervlakte garandeert.

Terug- en vooruitblik

Wat een rijkdom van toegangen tot en uitwerkingen van het begrip oppervlakte. Ga na wat er in reken-wiskundemethoden van terechtkomt. Raadpleeg ook Wiskobas-Bulletin, leerplanpublicaties 7 en 9 (handleiding en werkblokken) waaruit dit opstel afkomstig is. Er zijn vragen te over die u uzelf dan zult kunnen stellen.

Even schromelijk als oppervlakte *wordt in het vigerende onderwijs* verhouding *verwaarloosd, het onderwerp van het volgende opstel*.

6. Verhoudingen als verschijnsel

Hoe groot is die vis? *figuur 6.1*

Waarvoor verhoudingen?

Ik vergelijk met elkaar de *lengtes* van
- de twee armen van een hefboom,
- twee mensen qua lengte,
- twee afstanden op de kaart,

of *tijden* van
- twee schaatsers om een afstand af te leggen,
- twee vloeistoffen om aan de kook te komen,
- twee werklieden om een arbeid te verrichten,

of de *hoeveelheden* van
- zoveel witte op zoveel zwarte kralen in een snoer,
- zoveel mannen op zoveel vrouwen in een beroep,
- zoveel lepels dit op zoveel lepels dat als ingrediënten in een mengsel,

of de *gewichten* van
- twee mensen,
- dezelfde hoeveelheid van twee verschillende stoffen,
- twee metalen in een legering,

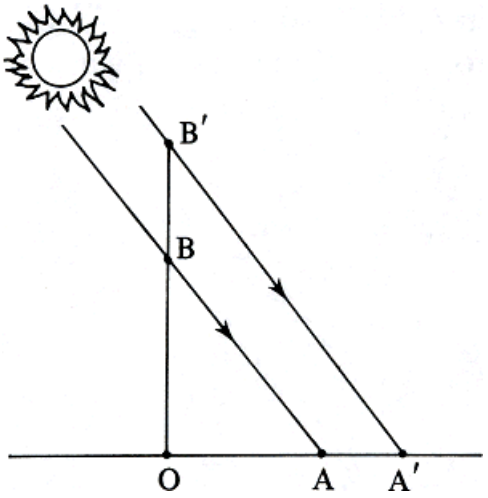
of de *krachten* van
- twee mensen,
- twee machines,

en het blijkt dat *de één staat tot de ander als 3 staat tot 4*.

Waarom zo ingewikkeld? In de vierde à vijfde klas basisschool leer je breuken en in de breukentaal is dit simpelweg *de één is ¾ van de ander*. Breuken zijn getallen. Je kunt er lekker mee rekenen, je hoeft er zelfs niets meer van te begrijpen als je maar goed de regels kent.

Waarom dan verhoudingen? Als een manier om iets ingewikkeld te zeggen, dat ook eenvoudig kan - met twee getallen: 3 staat tot 4 of 3 : 4, wat ook met één getal kan, met de breuk ¾?

En waarvoor OA : OB = OA′ : OB′, als het met *bij die stand van de zon is doorgaans de schaduw 3/4 van het voorwerp* eenvoudiger gaat?



figuur 6.2

Die vragen zijn telkens weer gesteld en met wat zich in ‘New Math’[1] heeft afgespeeld, is de knoop dan doorgehakt: verhoudingen en evenredigheden werden afgeschaft. Afgeschaft - dat wil zeggen dat het *werken met* en het *spreken over verhoudingen* door het *rekenen met breuken* is vervangen.

1 Met ‘New Math’ wordt het nieuwe wiskundeonderwijs bedoeld, zoals dit vanaf ongeveer 1960 in de Verenigde Staten is ingevoerd.

De wiskundige is op unificeren uit. *Terecht*, want waarvoor twee wiskundige werktuigen als je het met één kunt doen? En *onterecht*, want in het dagelijks

leven, in de toepassingen heb je juist behoefte aan een veeltal werktuigen (én aan de wetenschap hoe het één met het ander is gerelateerd).

Onterecht ook qua didactiek. Want didactiek moet rekening houden met wat aan mentale ervaringen in vaardigheden bij de leerlingen aanwezig is en met de manier waarop ze zich ontwikkelen. Juist 'verhouding' is een prachtvoorbeeld om zich te realiseren hoe wij - van de wieg af aan - theoretische ervaringen opdoen en vaardigheden ontwikkelen, aanvankelijk onbewust en geleidelijk bewuster. Dáár moet de didactiek bij aanknopen, bij wat in de kinderen leeft op het punt van 'verhouding' en er de bewustmaking van bevorderen.

We opereren met verhoudingen aleer we weet hebben van getallen - zelfs bij dieren moet het verwerken van informatie gepaard gaan met het opereren met verhoudingen. Om verhoudingen te preciseren, om ze los te maken van de objecten, worden er uiteindelijk getallen bijgehaald: 'een half' wordt 'een tweede'. Moet '3 staat tot 4' beslist wijken voor'¾'?

'Verhouding' ingebouwd of aangeleerd?

De bal in de andere hoek van de kamer verschijnt op het netvlies van de baby even groot als de knikker vlak voor zijn oog. Maar op het netvlies wordt meer afgebeeld dan bal en knikker: omgevingen van die voorwerpen, die informatie verschaffen omtrent ver-weg en nabij. En al die informatie wordt doorgeseind naar de hersenschors om te worden verwerkt, op een manier die de baby in staat stelt, in strijd met wat op het netvlies wordt afgetekend, de knikker van de bal qua grootte te onderscheiden, voorwerpen, nabij en ver-weg, op wat je noemt hun ware grootte te schatten.

figuur 6.3

Een reus in het prentenboek, een groot paleis, Klein Duimpje en een mier - ze kunnen allemaal even groot afgebeeld zijn. Juist - maar dan niet op dezelfde bladzij. Op de één kan de reus het hele blad vullen, op de ander Klein Duimpje. Maar wee, als ze bij elkaar komen, want dan moeten hun verhoudingen kloppen. (Of neen -

Klein Duimpje kan vlakbij en de reus in de verte afgebeeld zijn, beiden ogenschijnlijk even groot.)

Verhoudingen moeten kloppen als het kind plaatjes kijkt: deze bal is van

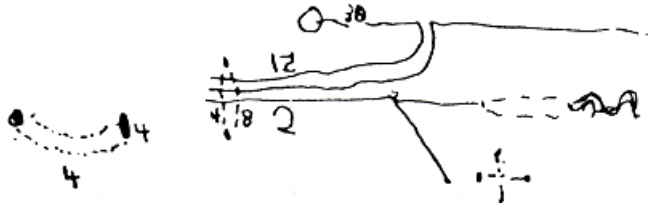
de pop en die van het meisje. Vreemd dat het kleine kind als het zelf tekent, verhoudingen niet in acht neemt. Laat het dan vreemd zijn - het is net zo vreemd als het tekenen van poppetjes zonder buik op een leeftijd waarop het kind zoiets van zijn prentenboek niet zou accepteren. Ik ken geen psychologische verklaring voor deze discrepantie.

Kinderen spelen met auto's, poppen, huizen op verschillende schaal naast elkaar - het kan moeilijk anders. Maar als het moet, weten ze wát verhoudingsgewijs bij wát hoort en hoe groot zoiets 'in het echt' is. Ze weten het operationeel en passief. Op welke leeftijd wordt zoiets bewust en actief? Ik schat dat dit met zes jaar begint: Een rij observaties:

Bastiaan (6:1)[1]. *Na een reeks zonnedagen ziet hij wolken en zegt: 'Het gaat regenen.' 'Neen,' zeg ik, 'dit zijn heel hoge wolken, daar komt geen regen van; regenwolken zijn laag en donker.' Hij: 'Hoe hoog zijn die wolken?' Ik (overdrijvend): 'Tienduizend meter.' Hij: 'En hoe hoog zijn regenwolken?' Ik: 'Duizend meter.' Hij: 'Dus (met de hand op de grond) als wij hier zijn en de regenwolken zó hoog (wijst ongeveer 30 cm boven de grond), dan zijn dat (wijst ongeveer 1 meter boven de grond), geen regenwolken*.'

- Verhoudingen worden meetkundig uitgedrukt - met de precisie hapert het nog.

Bastiaan (6:0). *Tekening achteraf van wat hij in de zandbak heeft gebouwd: tunnels (gestippeld), wegen, bruggen, muren*.



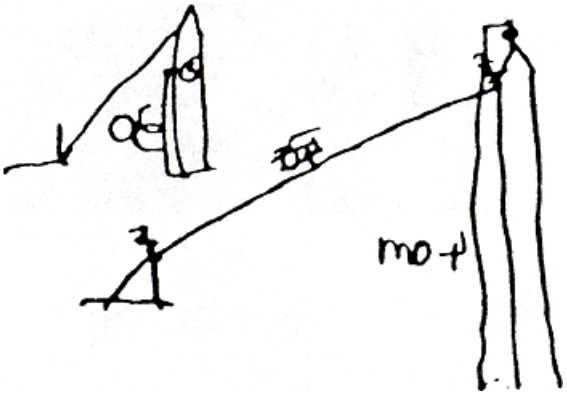
figuur 6.4

Bastiaan drukt op afstanden van een decimeter met parallelle wijsvingers gaten in het zand. De volgende decimeter past hij af door zijn linker wijsvinger in het gat te zetten dat eerst door de rechter gemaakt is. De getallen zijn dus decimeters.

- Verhoudingen worden meetkundig en numeriek weergegeven - er wordt precisie betracht.

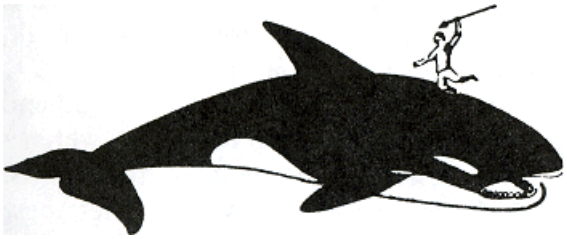
Bastiaan (7:6). *De hoogte van een kerktoren (en apart van de klok) wordt viserend gemeten: vergeleken met een stok op een muurtje geplaatst, op een - afgestapte - afstand van de kerk*.

1 (6:1) wil zeggen: zes jaar en 1 maand oud.



figuur 6.5

•‘Verhouding’ als middel om een probleem op te lossen - meetkundig schetsmatig én numeriek met de vereiste precisie.

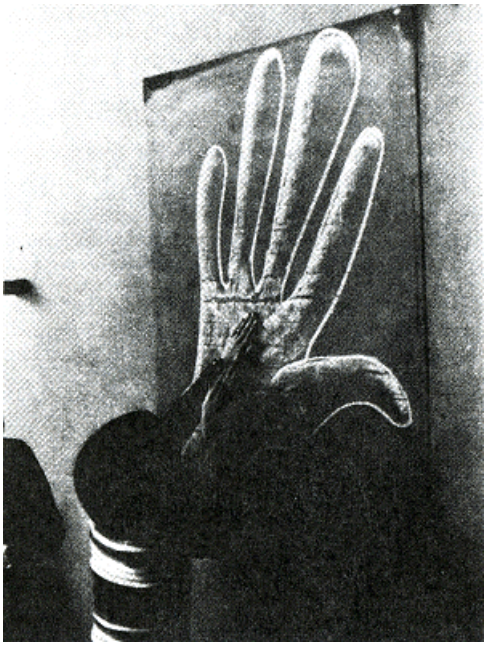


figuur 6.6

Coen (8:0) *kijkt met zijn vader naar de poster voor de film* Orca the killer whale. *‘Wat klopt hier niet,’ vraagt Vader. En Coen, na enige aarzeling: ‘De walvis moet kleiner wezen. Toen we in Engeland waren, zagen we een Orca, die maar zo groot was als twee mannen... Ik herinner me de Orca toen hij uit het water sprong en de oranje bal raakte.’*

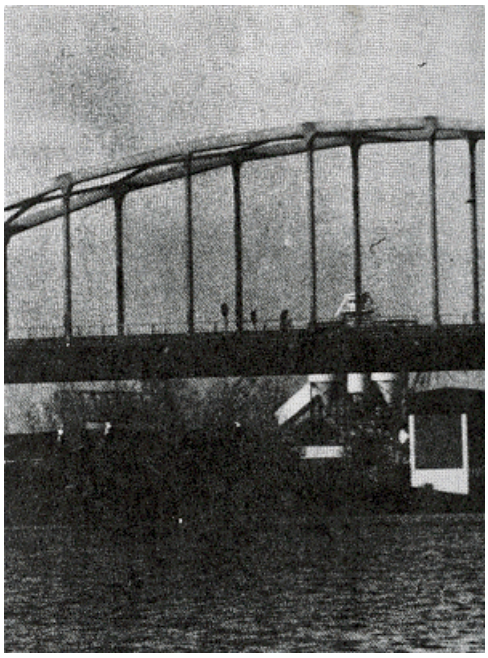
•‘Verhouding’ om een conflict te beslechten; visuele en mentale situatie numeriek vergeleken met de vereiste precisie.

Een derde klas (De groeten van de reus): *Uit het spoor, door de hand van de reus op het bord achtergelaten, wordt schattend afgeleid hoe groot de reus is*.



figuur 6.7

•‘Verhouding’ als middel om een probleem op te lossen meetkundig gegeven en numeriek vertaald.



figuur 6.8

Een onophoudelijke strijd tussen hen die met de liniaal meten en het spoor bijster raken en hen die het mannetje zeven keer in de verticale bruggepijler zien opgaan.

Ik zou dit verhaal kunnen vervolgen tot gevorderde leeftijd toe. Het blijkt dat nog veel ouderen inzichtelijk met verhoudingen blijven werken, waar men breuken van ze zou verwachten.

Verhouding is iets oorspronkelijks. Ik laat in het midden hoeveel ervan 'ingebouwd' is, voorgeprogrammeerd in de computer van onze hersenschors en hoeveel aangeleerd. Aangeleerd - en dan bedoel ik niet op school, want daar komen verhoudingen, als het dan nog gebeurt, laat aan de orde en bovendien bij wijze van sommetje die de intuïtieve 'verhouding' negeren of aan diggelen gooien. Aangeleerd veeleer met prentenboeken en speelgoed die onze grote wereld op schaal nabootsen.

Breuken worden meestal op een ander spoor dan dat van de verhoudingen geleerd en dat is jammer. In het onderwijs zouden breuken van verhoudingen kunnen profiteren en verhoudingen van breuken, verondersteld dat die twee leersporen didactisch in elkaar werden geleid. 'Verhouding' kan *didactisch* geenszins gemist worden, al lijkt het puur *mathematisch* wel zo te zijn.

Verhoudingen maken en bepalen

Verhoudingen worden allereerst *beleefd* - we komen er herhaaldelijk nog op terug. Inmiddels iets over hun getalsmatige precisering.

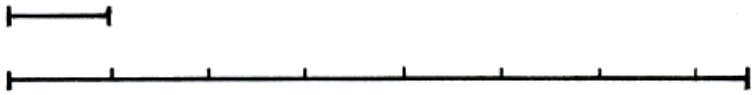
Jan en Piet moeten knikkers verdelen in de verhouding ‘3 staat tot 2’. (Dit zijn nu eenmaal die verdeelsommen. Waarom ‘3 staat tot 2’? Omdat Jan nog twee broertjes heeft tegen Piet één? Of omdat Jan 9 jaar is en Piet 6?) Hoe gaan ze het doen? Ze hoeven niets van verhoudingen af te weten; ze nemen er telkens 3 respectievelijk 2 van. Of om sneller op te schieten 6 en 4 of 30 en 20. Tot de voorraad op is. (Want de sommen zijn zo, dat het opgaat.)

Laat het nu echt gebeuren en met een heel grote voorraad knikkers - ‘ontelbaar veel’. Wel, dan doe je het op het oog (of op het gewicht). Bijvoorbeeld zoals je limonade verdeelt: een glas limonade, bestaande uit ontelbaar veel druppels vloeistof: in twee cilinderglazen met dezelfde middellijn schenken zodat de hoogtes staan als 3 staat tot 2. Je kunt het met limonade doen, maar ook met knikkers. Hoe controleer je zo'n verhouding? Door te meten. En hoe meet je? Met de liniaal.

Maar het hoeft niet met de liniaal. En soms kan het niet eens met de liniaal.

Een weg kun je meten door hem af te stappen en als je thuiskomt, kun je met de centimeter nagaan hoe lang je stap is. Maar misschien hoeft het niet eens. Als je alleen maar wilt weten welke van twee wegen de kortste is of hoe twee wegen zich verhouden, hoef je je geen zorgen te maken over de maatstaf waar je mee meet. De maatstaf doet er niet toe als het alleen op de verhoudingen aankomt.

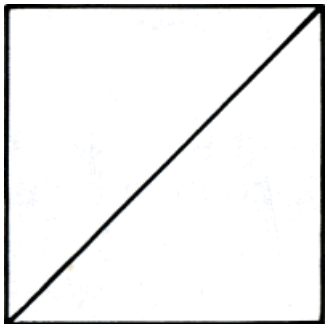
Hoe verhouden zich de lijnstukken hieronder? Je legt het kleinere zo vaak als het kan op het grotere neer. Het gaat zeven keer, maar er blijft een rest, die de helft van het kleine lijnstuk lijkt te zijn. Dus had je beter met de helft van het kleine lijnstuk als maatstaf kunnen beginnen. Meet je daarmee, dan blijkt het grote 15 en het kleine 2 te zijn. Ze staan tot elkaar als 15 staat tot 2.



figuur 6.9

Zo eenvoudig gaat het niet altijd. Neem van een vierkant de diagonaal en de zijde. Als de zijde a is berekende de diagonaal volgens Pythagoras op

$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$



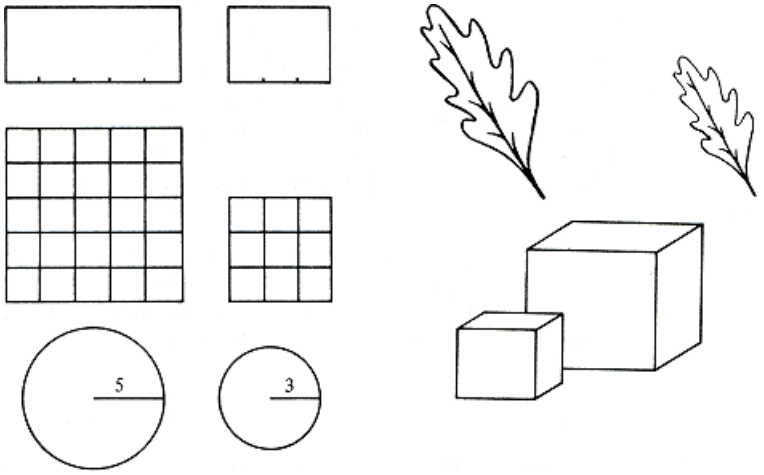
figuur 6.10

De verhouding diagonaal tot zijde is als √2 staat tot 1. Maar √2 is ‘irrationaal’: er zijn geen gehele getallen m en n te bedenken zo dat √2 = m/n oftewel:

Voor geen paar gehele getallen m,n is diagonaal : zijde = m : n. Wel kun je die verhouding willekeurig goed benaderen: 1,414... of met gewone breu-

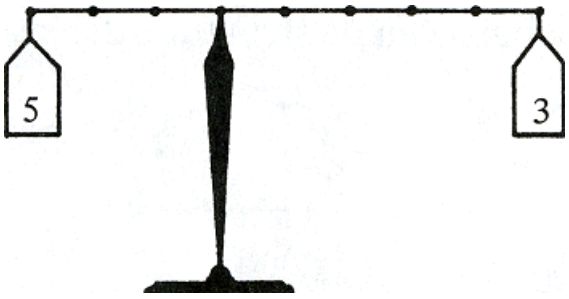
ken 3 : 2, of 17 : 12, of 577 : 408, ... - reken maar na: door te kwadrateren krijg je iets dat telkens beter 2 : 1 is. Niet alleen lengtes, maar ook oppervlakten, inhouden, gewichten en tijden kun je verhoudingsgewijs vergelijken.

De twee *rechthoeken* hieronder verhouden zich als 5 staat tot 3, dat wil zeggen zoals hun bases, omdat de hoogten dezelfde zijn. De *vierkanten* verhouden zich als de kwadraten van hun zijden, dus als 25 : 9, de *cirkels* als de kwadraten van de stralen, 25 : 9; Hoe groot een cirkel van oppervlakte is, hoef je er niet voor te weten. Nog krasser: teken een willekeurige figuur en beeld hem af in de verhouding 5 : 3. De oppervlakten staan dan in de verhouding 25 : 9. En met *ruimtelijke inhouden* gaat het op een dergelijke manier, maar dan in de derde macht: 125 staat tot 27 bij de kubussen of bij bollen of bij andere figuren, die in de verhouding 5 : 3 op elkaar zijn afgebeeld.



figuur 6.11

Verhoudingen van gewichten - je kunt ze bijvoorbeeld aflezen op de hefboom: als bij evenwicht de armen zich als 3 : 5 verhouden, dan verhouden de gewichten zich als 5 : 3.



figuur 6.12

Of met een veerbalans: de gewichten verhouden zich als de lengtes waartoe de veer is uitgerekt.

Met beide methoden vergelijk je feitelijk lengtes als zijnde plaatsvervangers van gewichten.

Zo doe je het ook bij *tijden* - ze staan tot elkaar als de wegen die de wijzer op de wijzerplaat heeft afgelegd.

Verhoudingsgetrouw afbeelden

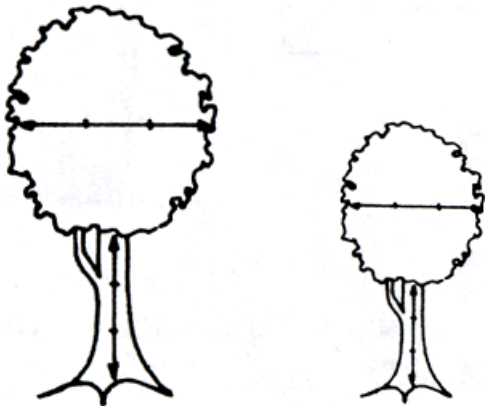
Afbeelden speelde een rol in de voorafgaande voorbeelden. Afbeelden bij wijze van plaatje of symbolisch handelend (het geval van de wolken) of zoals de wijzer die tijd afbeeldt op de kringloop op de wijzerplaat.

Al die afbeeldingen zijn *verhoudingsgetrouw: De verhoudingen in het origineel worden getrouw weergegeven in het beeld.* Het woord verhouding hoeft er niet aan te pas te komen. Je kunt het waarnemen of de verhoudingen kloppen. Of veeleer, het valt je op als iets niet klopt. Het kind identificeert vroegtijdig plaatjes en modellen met de voorwerpen die ze geacht worden voor te stellen, ongeacht de schaal. Plaatjes en modellen op verschillende schaal naast elkaar worden als beelden van hetzelfde object aanvaard. ‘Hoe groot is een walvis in 't echt?’ kan een kind vragen, overtuigd dat de plaat - afgezien van de schaal - de walvis getrouw weergeeft. Wel zijn er ook van die schetsmatig, met één lijn getekende, walvissen, maar zelfs dit verschil tussen fotografisch getrouw beeld en een karakteristieke schets wordt begrepen.

Wegingen met een (verticale) veerbalans die Bastiaan (5:6) *uitvoerde, werden op een* horizontaal *en op andere schaal getypt beeld van de veerbalans aangetekend. Bastiaan merkte wel onbeduidende verschillen in de cijfernotatie* (*I in plaats van* 1) *op, maar noch het verschil in oriëntatie noch de afwijkende schaal*.

Het getypte beeld van de veerbalans was immers structureel getrouw.

Zonder aarzelen aanvaarden kinderen dat op het schoolbord voorwerpen tien keer zo groot als op het werkblad worden getekend, dat de getallenlijn op het schoolbord 1 dm tot eenheid heeft, tegen 1 cm op het werkblad. Zij aanvaarden naast elkaar getallenlijnen waarbij hetzelfde interval in plaats van de eenheid een tiental of honderdtal voorstelt. Ze zouden echter direct protesteren tegen wijzigingen van de structuur die ingaan tegen de getrouwheid van verhoudingen.



figuur 6.13

Wat betekent ‘verhoudingsgetrouw’ bij het afbeelden? Het principe luidt:

> Wat onderling gelijk is in het origineel moet onderling gelijk zijn in het beeld.

Uit dit principe volgt door aan elkaar zetten van lengtes:

> Wat dubbel (drie keer, ...) zo groot is in het origineel, moet dubbel (drie keer, ...) zo groot zijn in het beeld.

Door een blikwisseling volgt hieruit:

> Wat de helft (een derde, ...) is in het origineel, moet de helft (een derde, ...) zijn in het beeld.

Die twee samengesteld levert uitspraken op zoals

> Wat zich in het origineel verhoudt als 3 :4(als 11 : 7, algemener als p : q), moet zich in het beeld verhouden als 3 : 4 (als 11 : 7, algemener als p : q).

Bij afbeeldingen, willen ze verhoudingsgetrouw zijn, moeten de *interne verhoudingen van het beeld dezelfde blijven als van het origineel*.

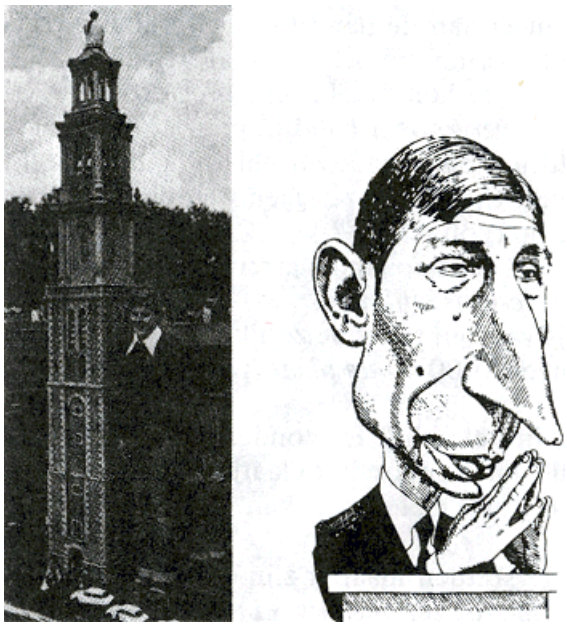
Met dit verhoudingsgetrouwe afbeelden raken de kinderen vroegtijdig bekend bij schilderijen, kopieën van schilderijen, maquettes. Systematische of toevallige afwijkingen worden geconstateerd, bijvoorbeeld

- *het gebruik van verschillende maatstaven in verschillende richtingen*,
- *het gebruik van verschillende maatstaven bij verschillende figuren*,
- *het gebruik van verschillende maatstaven bij onderdelen van dezelfde figuur*,

en dit geschiedt niet door verhoudingen of maatstaven expliciet te maken, maar in formuleringen zoals

> dit is te smal - namelijk vergeleken bij de hoogte; die figuur is te groot - namelijk vergeleken bij deze; de neus is veel te groot - namelijk vergeleken bij de andere lichaamsdelen.

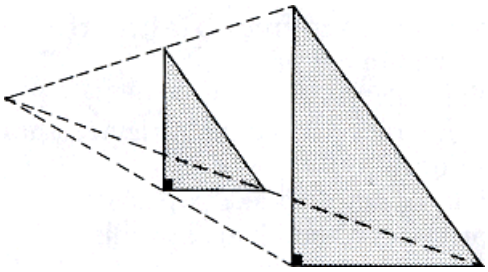
Aanmerkingen ten aanzien van de getrouwheid van verhoudingen, maar zonder dat er uitdrukkelijk van verhoudingen sprake is.



figuur 6.14

Het vereist dieper inzicht in meetkundige relaties om andere gegevens als criteria van verhoudingsgetrouwheid erbij te betrekken:

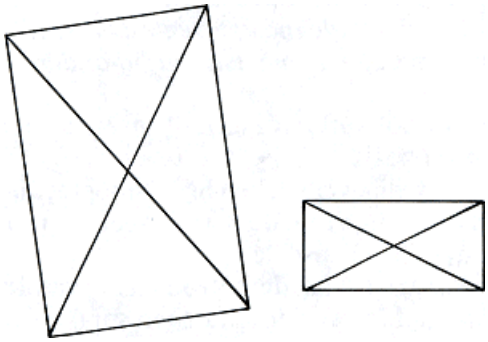
Wat in het origineel een rechte hoek is, moet er in het beeld ook een zijn.



figuur 6.15

Of meer algemeen:

Bij het verhoudingsgetrouw afbeelden blijven de hoeken ongewijzigd. Zijn de twee rechthoeken hiernaast verhoudingsgetrouw op elkaar af te beelden? Je kunt het beter zien als je er de diagonalen intekent en op hun hoeken let.



figuur 6.16

Er is echter nog meer aan de hand bij het verhoudingsgetrouw afbeelden. Hoe beeldt ik iets verhoudingsgetrouw af? Daarstraks heb ik het woord ‘kopie’ gebruikt. Kopie kan betekenen: *precies eender*. Het kan ook betekenen: *verkleind* of *vergroot*. En dat kopiëren kan dan geschieden fotografisch, door lichtdruk, als schaduwbeeld of netjes natekenend, eventueel met een pantograaf. Op schaal - zeggen we ook.

Wat bedoelen we met ‘op schaal’?

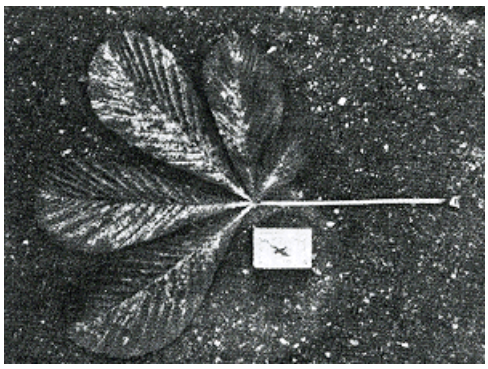
1 : 10 000 staat wel eens op landkaarten en dat wil zeggen: *lengte* 1 *op de kaart is* 10 000 *in de werkelijkheid*.

Onder het plaatje van een microbe zou kunnen staan 1000: 1 en dat betekent qua afmetingen 1000 *op de plaat is* 1 *in de werkelijkheid*.

Hoe groot is iets in het echt? En zonder uit te kijken bezwijkt de leerling voor de verleiding dat 1 cm op het plaatje in werkelijkheid 1 m of 1 km of 100 000 km is, alsof het niet anders kan.

Er zijn levensgrote statuen maar er zijn ook onder- of bovenmaatse, veelal 2 : 3 of 3 : 2 d.w.z. 2 *in het beeld is* 3 *in het echt of omgekeerd*.

In biologieboeken heb je van die plaatjes - met een voorwerp naast een boomblad om te laten zien, wat de verhoudingen zijn.



figuur 6.17

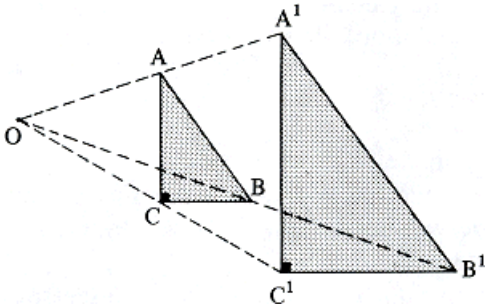
Die 1 : 10 000 of 1000 : 1 of 2 : 3 of 3 : 2 van daarstraks zijn *schaalverhoudingen* oftewel *externe verhoudingen* in tegenstelling tot de *interne* die we eerder bekeken.

Wel, de verhouding van boomblad tot lucifersdoosje is zo'n interne verhouding binnen het plaatje. De verhouding van boombladplaatje tot echt blad, van plaatje van het doosje tot echt doosje is extern: het is de *schaalverhouding*.

Ziedaar twee manieren om uit te leggen wat ‘verhoudingsgetrouw’ betekent en hoe je verhoudingsgetrouw afbeeldt:

1. de *interne* verhoudingen in het beeld moeten overeenstemmen met de corresponderende in het origineel.
2. de *externe* verhouding tussen beeld- en origineellengtes moet alom dezelfde zijn: de schaalfactor.

Hoe komt ‘verhoudingsgetrouw’ aan deze twee met elkaar gelijkwaardige aspecten?



figuur 6.18

(1) O′A′ : A′B′ = OA : AB is een gelijkheid van inwendige verhoudingen in beeld respectievelijk origineel,
(2) O′A′ : OA = A′B′ : AB is een gelijkheid van externe verhoudingen.

Maar uit de geldigheid van (1) volgt mathematisch die van (2) en omgekeerd, door verwisseling van de binnentermen.

Uit de *gelijkheid van de interne verhoudingen* volgt dus de *standvastigheid van de externe verhoudingen*, en omgekeerd. In (2) staat de schaalverhouding van het afbeelden, die alom dezelfde moet zijn.

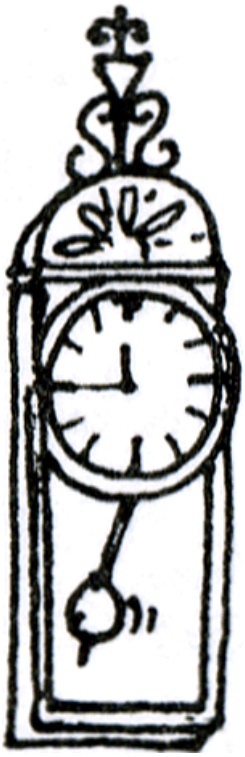
Verhoudingsgetrouw in ruimere zin

In ‘verhoudingsgetrouw afbeelden’ was het afbeelden meetkundig bedoeld. Op het eind van ‘Verhoudingen maken en bepalen’ stond er echter al een toespeling op een ruimere betekenis: de rondlopende wijzerplaat beeldt als het ware de aflopende tijd af op de te doorlopen rand van de wijzerplaat. In gelijke tijden legt de wijzerpunt gelijke wegen af, tenminste als het uurwerk niets mankeert. Het is het principe van wat je noemt *eenparige beweging: In gelijke tijden gelijke wegen*, dus *in de dubbele* (*drievoudige...*) *tijd de dubbel* (*drievoudige*...) *weg*, en weer met blikwisseling:

In de halve (*derde van de*, ...) *tijd de halve (een derde van de*, ...) weg en uit deze gecombineerd:

Als de tijden staan tot elkaar als 3 : 4 (*als* 11 : 7, *als p : q*) *dan staan de afgelegde wegen tot elkaar als* 3 : 4 (*als* 11 : 7 *als p : q*).

Uiteraard is dit niet bij elke beweging zo. Het is kenmerkend voor de eenparige beweging: *de betrekking tussen tijd en afgelegde weg is verhoudingsgetrouw*, oftewel *de wegen verhouden zich als de tijden waarin ze worden afgelegd*.



figuur 6.19

Nog anders gezegd: *de weg was evenredig met de tijd*. (‘Reden’ is een ander woord voor verhouding - evenredig is dus ‘dezelfde verhouding hebbende’.)

Het is weer de *interne* verhouding die hier aan de orde is, weg staat tot weg, tijd staat tot tijd.

Maar de *externe* mag er ook bij te pas komen, dus *verhouding 'weg staat tot tijd'* waar we dan ook de naam *snelheid* voor hebben:

10 m per sec
of 20 m per 2 sec
of 36 km per uur
of 72 km per 2 uur.

Het is allemaal hetzelfde, als de beweging maar eenparig is. Dit is dan een nieuwe definitie van eenparigheid en wel door middel van *externe* verhouding: *constante snelheid*.

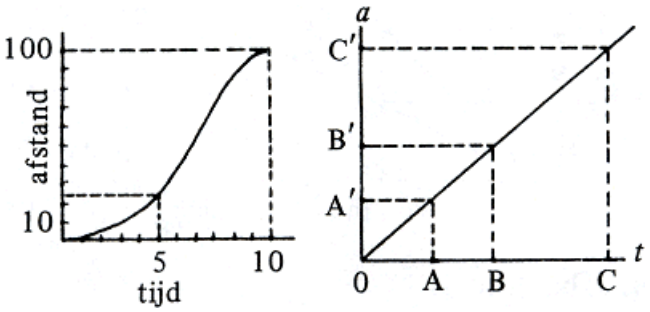
Dit was weer een voorbeeld van 'verhoudingsgetrouw'. En zo zijn er meer. Voor één soort stof *verhouden de gewichten zich als de hoeveelheden*, of anders gezegd, *gewicht en hoeveelheid zijn evenredig* - dus aan elkaar gelijkgestelde *interne* verhoudingen. En als de hoeveelheden in inhoudsmaten zijn gemeten, heet de *externe* verhouding *gewicht per hoeveelheid* of ook *soortelijk gewicht*.

Of van een zekere handelswaar *verhouden de prijzen zich als de hoeveelheden* (*gewichten*), anders gezegd, *prijzen en hoeveelheden (gewichten) zijn evenredig*. Aan elkaar gelijkgestelde *interne verhoudingen - en de externe* verhouding verschijnt als *prijs per eenheid* (*per kg*).

In het geval van de meetkundige afbeeldingen leidt de schaalverhouding tot een *onbenoemd* getal: *de schaalfactor*.

In de nieuwe voorbeelden, waar verschillendsoortige grootheden met elkaar vergeleken worden, is het een *benoemd* getal: m/sec., km/uur, g(ram)/cm^3, t(on)/m^3, f(lorijn)/l(iter), f(lorijn)/kg enzovoort.

Grafische visualisering



figuur 6.20

Om een beweging te visualiseren maakt men een *tijd-weg grafiek*. In de grafiek hierboven is de afgelegde weg tegen de tijd uitgezet, bijvoorbeeld na 5 sec 25 m afgelegd. De beweging is niet eenparig: de sprinter moet kennelijk eerst op draf komen en op het eind verslapt hij.

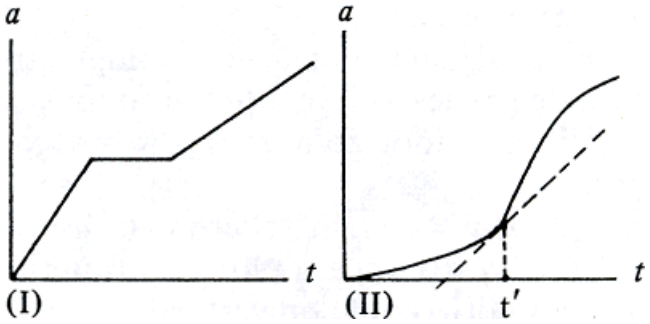
Hoe wordt een eenparige beweging grafisch weergegeven?

Een rechte lijn. Immers, *in gelijke tijden gelijke wegen* en dat sluit alleen op elkaar aan bij een rechtlijnige grafiek. Of anders gezegd *weg en tijd evenredig*, dus

$$OA : OB : OC : ... : AB : AC : BC : ... = OA' : OB' : ... A'B' : A'C' : B'C' : ...$$

en dat gaat nét bij een rechtlijnige grafiek op.

Of als je het met de standvastigheid van de externe verhouding *weg: tijd* wilt doen, dan deugt $OA' : OA = OB' : OB = OC' = OC = ...$ $A'B' : AB = ...$ juist langs een rechte lijn. Deze verhouding, die de steilte van de lijn weergeeft, *stijgingsmaat of richtingscoëfficiënt* genaamd, betekent voor de tijdweg grafiek de *snelheid*, uiteraard van eenparige beweging.

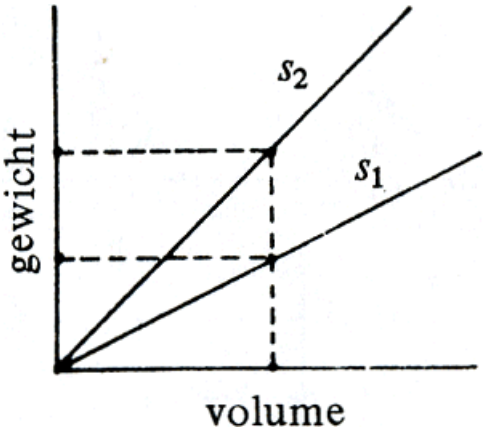


figuur 6.21

(Zeker zijn er ook andere, met wisselende snelheid, zoals in grafiek I voorgesteld, of met een snelheid die zelfs continu verandert, zoals in grafiek II; daar valt dan nog een momentele snelheid te definiëren: op het tijdstip *t* bepaald door de stijging van de raaklijn aan de grafiek. Maar dit is een ander chapiter, dus tussen haakjes.)

Zoals de afstand tegen de tijd kan men het *gewicht tegen het volume* uitzetten, weer een rechtlijnige grafiek, waar de stijgingsmaat dan als soortelijk gewicht is te interpreteren - hieronder grafieken van twee stoffen, de ene soortelijk dubbel zo zwaar als de ander.

En net zo kan je prijsgrafieken maken, diverse voor verschillende produkten.



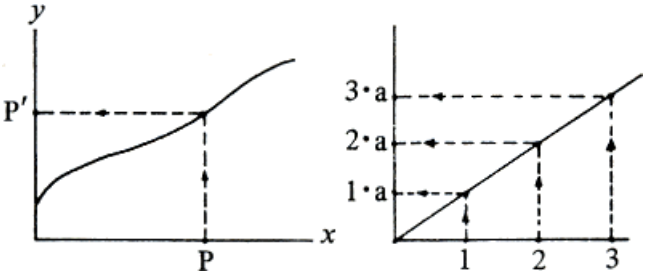
figuur 6.22

Functie, grafiek en afbeelding

Als iets *beweegt*, zeg je ook wel *de weg is een functie van de tijd*.

Als je *mikt* is *het trefpunt een functie van de richting* van mikken.

De *prijsindex als functie van de tijd*, de *temperatuur* in De Bilt *als functie van de tijd* zie je wel eens door een grafiek gevisualiseerd.



figuur 6.23

y is functie van x betekent *aan een waarde van x beantwoordt er een van y*, en dat kun je per grafiek ook interpreteren alsof je de horizontale as op de verticale afbeeldt en wel door middel van een pijl die bij de grafiek gebroken wordt: als het punt P op de horizontale as loopt, dan loopt zijn beeldpunt P' mee op de verticale as.

Zo'n afbeelding is in het algemeen niet verhoudingsgetrouw. Wil dit wel het geval zijn, dan moet de grafiek een rechte lijn (door het snijpunt van de assen) zijn. Een functie die door zo'n grafiek wordt voorgesteld, heet dan ook een *lineaire functie*.

Zo'n verband wordt door $y = ax$ met zekere vaste a beschreven.

De *a* is ons welbekend. Vatten we de lineaire functie als (verhoudingsgetrouwe) afbeelding van horizontale op verticale as op, dan is *a de schaalfactor*, oftewel *a* : 1 = 2*a* : 2 =... de *schaalverhouding van de afbeelding*. In

plaats van ‘verhoudingsgetrouw afbeelden’ kan men ook zeggen *lineair afbeelden*, d.w.z. door middel van een lineaire functie.

Naar verhouding

We begonnen de uiteenzetting met het verhoudingsgetrouw afbeelden. In het begrip hiervan kun je het ver brengen zonder ooit het woord ‘verhouding’ in de mond te nemen, dank zij de visualisering. Andere contexten vereisen vroegtijdig verbalisering, zij het dan niet direct met het begrip verhouding, maar wel met het begrip *naar verhouding*.

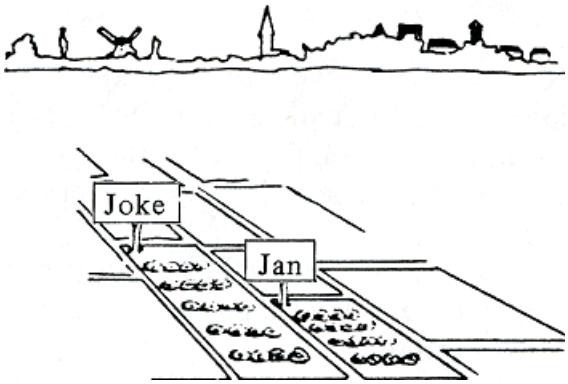
Als mentaal object is dit tegen het einde van de kleuterleeftijd aanwezig.

> Deze chocola is zoeter omdat er - naar verhouding - meer suiker in zit.
> Een vlo kan - naar verhouding - hoger springen dan een mens.
> Een reis naar Zuid-Amerika is - naar verhouding - duurder dan een naar Noord-Amerika.
> In Nederland zijn - naar verhouding - meer fietsen dan in de Bondsrepubliek Duitsland.

In de expliciete formulering kan het ‘naar verhouding’ ontbreken, ook al is duidelijk dat het op die plaats bedoeld is. De termen *naar verhouding meer, minder, evenveel* kunnen *van grof kwalitatief tot precies kwantitatief* bedoeld zijn: speciaal bij ‘meer’ of ‘minder’ kunnen schattingen bedoeld zijn, die door *veel, zeer veel, iets* verfijnd kunnen worden.

Bij ‘naar verhouding’ ontbreekt een relatieterm, die *vanzelfsprekend* kan zijn of *expliciet wordt toegevoegd*, bijvoorbeeld *naar verhouding tot het aantal inwoners zijn er in Nederland meer fietsen dan in de Bondsrepubliek Duitsland*.

Laten we een didactische sequentie aanduiden: *Welk bloembed is mooier*?



figuur 6.24

- Jokes bloembed is mooier dan dat van Jan. Er staan meer bloemen op.
- Geen kunst: Jokes bed is ook groter.
- Maar er staan toch meer bloemen op.
- Neen, eigenlijk staan er minder bloemen op, want het bed is groter.

Hoe beslecht je zo'n strijd? Je vraagt: In welk opzicht staan er minder bloemen op Jokes bed?

- Als je rekening houdt met de grootte.
- Verhoudingsgewijs.
- Absoluut staan er meer op Jokes bed, maar relatief zijn het er minder.

Verhoudingsgewijs... in verhouding tot wat? Relatief... ten opzichte waarvan?
- Als Jans bed even groot was als dat van Joke zouden er echt meer bloemen op staan.
- Als Jokes bed even klein was als dat van Jan zouden er minder bloemen op staan.

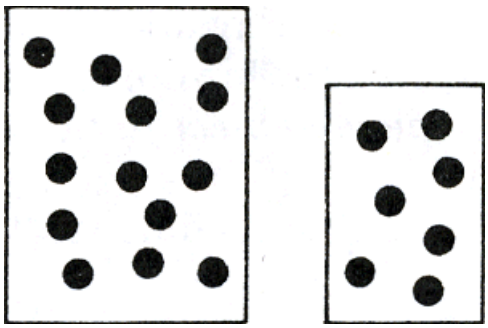
Je moet dus beide bedden even groot maken. En wat doe je dan met de bloemen?
- Even dicht planten als tevoren.

Dus, bij het vergroten of verkleinen de interne verhoudingen aanhouden.
- Als je bijvoorbeeld het bed dubbel zo groot maakt, ook dubbel zoveel bloemen zetten.

Dus de externe verhoudingen aanhouden.
- Je kijkt naar: hoeveel bloemen per vierkante meter.

De externe verhouding ‘bloemen per vierkante meter’ wordt gepreciseerd.

Een andere sequentie:
Waar krijgen de koeien meer eten?



figuur 6.25

- Bij boer De Groot, want zijn weiland is groter.
- Bij boer De Klein, want die heeft er minder koeien op.
- Maar De Groots weiland is toch maar groter.
- Het is hetzelfde want de koeien zijn zowat even dicht bij elkaar.

De interne verhouding.
- De Groot heeft zowat dubbel zoveel koeien op het weiland als De Klein, en zijn weiland is maar een beetje groter dan dat van De Klein. Dus hebben ze bij De Groot minder te eten.

De externe verhouding. Maar hoe zie je dat De Groots weiland maar een beetje groter is?
- Ik heb de hekken gemeten. Van De Groots weiland zijn ze niet eens anderhalf keer zo lang.

- De koeien eten toch geen hekken. De oppervlakte is dubbel zo groot. De Kleins weiland is 5 ha en dat van De Groot 10 ha. En het zijn dubbel zoveel koeien bij De Groot. 7 koeien per 5 ha. 14 per 10 ha.

De externe verhouding.

We merken een sequentie van niveaus op.

- Inzien dat ordeningen (van groter en kleiner, of meer en minder) gerelativeerd kunnen worden opgevat (naar verhouding groter, kleiner, meer, minder).
- ‘Naar verhouding’ begrijpen als ‘in verhouding tot ...’ en op de relatieplaats het in het onderhavige geval vereiste invullen.
- ‘Naar verhouding’ en ‘in verhouding tot’ zinvol gebruiken.
- ‘Naar verhouding’ en ‘in verhouding tot’ uit de context aanvullen.
- Operatief weten wat ‘naar verhouding’ en ‘in verhouding tot’ in het algemeen betekent.
- Uiteenzetten wat ‘naar verhouding’ en ‘in verhouding tot’ in het algemeen betekent.

Van *grof kwalitatief tot precies kwantitatief* kunnen hierbij een aantal stadia worden doorlopen waarbij in laatste instantie naar gelang van het onderwerp *interne en externe verhoudingen* over relatieve ordening beslissen. Opgaven waarin deze activiteiten beoefend worden, kunnen een visueel karakter hebben:

- huizen, mensen en bomen op verschillende schaal - welke horen bij elkaar en waarom?
- een aantal personen en, op andere schaal, een aantal kledingstukken - wat hoort samen?
- muren op verschillende schaal en van verschillende diktes - welke zijn dikker?
- weilanden met bloemen, vijvers met kikkers, hemels met wolken - waar zijn er naar verhouding meer?

Maar ook andere zintuigen kunnen erbij worden betrokken:

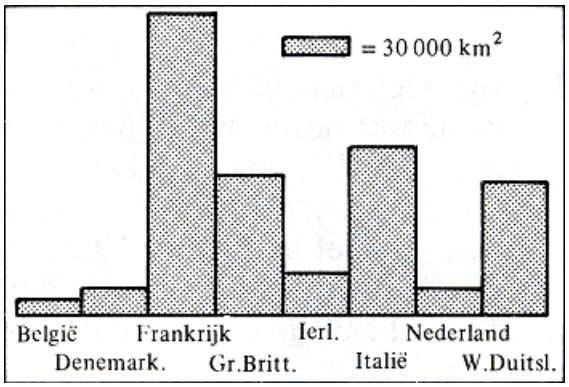
- een groot orkest, maar dat naar verhouding zachte muziek voorbrengt.

Andere visualiseringen

Bij het meetkundig afbeelden is verhoudingsgetrouwheid vanzelf gevisualiseerd. Grafieken zijn een middel om verhoudingsgetrouwheid te visualiseren, al is die op zichzelf niet-meetkundig gegeven. Maar verhoudingsgetrouwe beelden kunnen ook worden gebruikt om de verhoudingen zelf te visualiseren.

De voornaamste middelen van visualisering van verhoudingen zijn *histogrammen en beeldstatistieken, sectordiagrammen*.

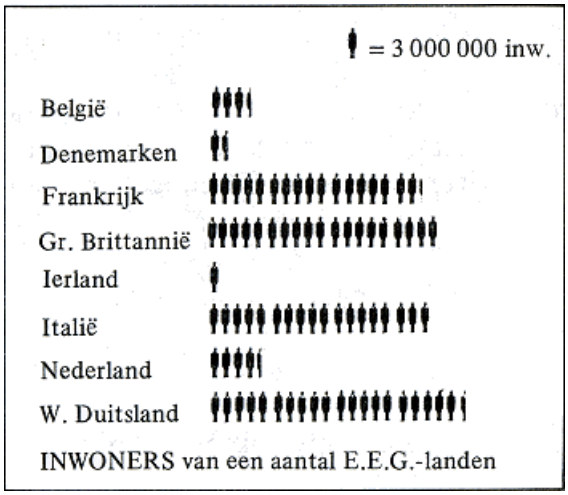
Voorbeeld voor het eerste:



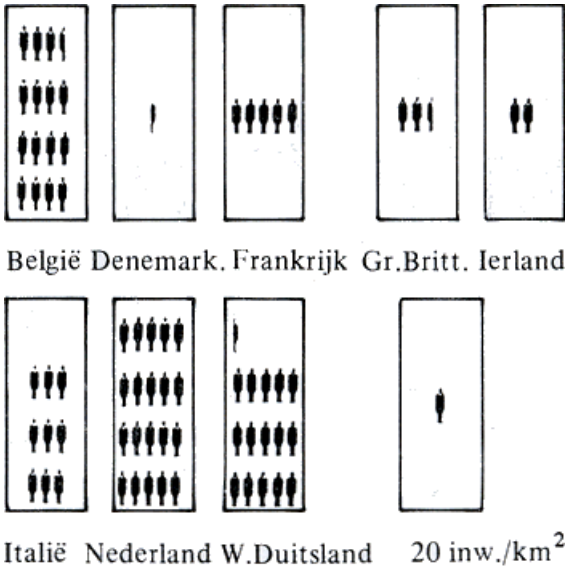
OPPERVLAKTE van een aantal E.E.G.-landen
figuur 6.26

De EEG-landen worden wat hun *oppervlakte* betreft, door *rechthoeken van gelijke basis en van met de oppervlakte evenredige hoogte* weergegeven, die als in een histogram naast elkaar zijn geplaatst. (Zie figuur 6.26.)

De *inwonertallen* door *rijen menselijke figuren* (elk bijvoorbeeld drie miljoen vertegenwoordigend, zie figuur 6.27). Beide beelden kunnen zo gecombineerd worden, dat de *menselijke figuren telkens in de rechthoeken worden geplaatst* (figuur 6.28) om de uiteenlopende dichtheid van bevolking (verhouding van inwonertal tot oppervlakte) te visualiseren.



figuur 6.27



DICHTHEID BEVOLKING van een aantal E.E.G.-landen
figuur 6.28

Voorbeeld van het tweede:

Een cirkel in sectoren opgedeeld beantwoordende aan en wat oppervlakte aangaat evenredig met de gebruikscategorieën van de bodem van een land

- voor verschillende landen naast elkaar uitgevoerd, illustreert de verschillen qua bodemgebruik (meer of minder agrarisch gebruik enzovoort).

Dergelijke visualiseringen zijn verhoudingsgetrouwe afbeeldingen, waarbij echter op andere verhoudingen dan die van afstanden van puntenparen wordt gelet, in het

onderhavige geval op verhouding van oppervlakken van landen, inwonertallen, bodemoppervlakken naar gebruikscategorieën, aan de ene kant en oppervlakken van vlakke figuren aan de andere kant.

Normering

Het complex van technieken, onjuiste toepassing van technieken, door die technieken bepaalde of liever niet bepaalde attitudes, dat ik met het woord ‘normering’ aanduid, wil ik door een aantal voorbeelden introduceren:

> Als we ons de aarde als speldeknop denken (1 mm middellijn), verschijnt de zon als een bol met middellijn 10 cm op een afstand van 10 m.

De maatstafreductie dient om krasse verhoudingen te visualiseren; men kiest een vertrouwde eenheid als uitgangspunt, hoe groot de schaal is, doet er weinig toe.

> Als we de ontwikkeling van het leven op aarde zich in een etmaal laten voltrekken, is de oermens een minuut geleden opgetreden en de menselijke beschaving een seconde geleden begonnen.

Het lijkt veel op het eerste voorbeeld: nu een tijdschaalreductie, die eventueel door een lineaire tekening kan worden geïllustreerd. De eenheid ‘dag’ is hier voor de grootste component gekozen, terwijl in het eerste voorbeeld met de speldeknop was begonnen.

De voorbeelden

Een op de vijf kinderen die geboren worden, is een Chinees, een op de vier auto 's is een Fiat tonen een voorkeur voor verhoudingen die als ‘één op de...’ zijn genormeerd. *Een recept ‘bœuf à trois moutardes’ voor vier personen*... - als maaltijdeenheid wordt voor recepten vaak 4 gekozen, in veel gevallen zal dit omrekeningen besparen. Het is echter riskant om bijvoorbeeld bij bakprocedures zonder meer op evenredigheden te vertrouwen.

De zuiverheid van drink- en zwemwater wordt aangegeven met *zoveel gram zout in één liter* of *zoveel colibacteriën in één cc*, waarbij de hoeveelheden die gedronken worden of waarin gezwommen wordt van geheel andere afmetingen zijn en de feitelijke onderzochte hoeveelheden weer van andere, maar dit blijft geheel buiten beschouwing.

De afvalproduktie wordt met zulk een vage eenheid als *een inwonerequivalent* gemeten, dat alleen maar dient om de produktie van huishoudingen en industriële bedrijven te schatten en er een belasting aan te verbinden. De kracht van nucleaire ontploffingen wordt in *kilotonnen TNT* gemeten, een merkwaardige normering die veeleer dient om nucleaire bommen onderling dan met conventionele springstof te vergelijken.

> Als de kosten van levensonderhoud in 1965 op 100 worden gesteld, komen ze in 1975 op 147 -

een voorbeeld voor de veel gebruikte indexcijfers, waarbij bij voorkeur van een basis 100 wordt uitgegaan. In andere gevallen wordt het gemiddelde als maat genomen en gelijk aan 100 gesteld, bijvoorbeeld bij het I.Q.:

> de gemiddelde score in een bepaalde populatie (van bepaalde leeftijd) wordt op 100 gesteld om andere scores hiermee te meten.

Die 100 sluit aan de ene kant goed aan bij het tientallig stelsel, en bewerkt aan de andere kant dat desniettemin tientallige *breuken* zoveel mogelijk vermeden worden. Dat het 100 en niet bijvoorbeeld 1000 is, komt van het percentrekenen. In het traditionele rekenonderwijs waren percent en rente nauw aan elkaar geliëerd. Dit is niet van ouds zo geweest; rente werd veeleer in ‘één op de...’ uitgedrukt (evenals bij belastingen die als tiende penning, dertiende penning, enzovoort werden geheven). Pas met de decimalisering van het geld werd het rente-percent rekenen effectief. De meest uitgebreide toepassing van het percentrekenen is tegenwoordig die bij het vergelijken van delen van een geheel:

het geheel wordt 100 gesteld, om er de delen in uit te drukken. De bedoeling hiervan is *verschillende opdelingen vergelijkbaar te maken*, waarbij de vergelijking nog door *visualisering gesteund* kan worden, bijvoorbeeld door *middel van sectordiagrammen*. De behoefte aan dit vergelijkbaar maken van gegevens in de vorm van compositiestaten is tegenwoordig de sterkste

motivering voor het percentrekenen; bovendien is het percentrekenen hier een werktuig dat zich vanzelf aanbiedt, zodra het idee is opgevat dan ten behoeve van vergelijkbaarheid de totalen uniform genormeerd moeten worden, dus niet

als Nederland even groot was als de Bondsrepubliek,

noch

als de Bondsrepubliek even groot was als Nederland,

maar

stel de oppervlakte (het inwonertal) van beide op 100 (ook wel eens 1000),

dan...

Dit normeren sluit ook gevaren in zich: men vergeet waar de genormeerde gegevens vandaan komen en dat er in verschillende gevallen ook van verschillende schaalfactoren sprake kan zijn:

- Er wordt aan van normering afhankelijke data, bijvoorbeeld indexcijfers, absolute betekenis toegekend, in het bijzonder worden van verschillende normeringen afkomstige data zonder hernormering met elkaar vergeleken;
- het getal 100 gaat een als het ware magische rol spelen;
- percentages die van verschillende normeringsprocedures afkomstig zijn, worden opgeteld of tot - niet gewogen - gemiddelden verwerkt;
- het wekt verbazing en wordt niet begrepen, wanneer - zeg bij verkiezingen - een partij in alle kiesdistricten zijn percentages vooruit ziet gaan, terwijl over 't geheel het percentage zakt;
- er wordt dubbel op genormeerd, zoals in het voorbeeld - uit een dagblad - in 1972 is het nationaal produkt per hoofd van de bevolking van Brazilië met 5% gestegen, maar deze stijging is voor het grootste deel teniet gedaan, doordat de bevolking in dezelfde tijd met 4½ % steeg.

Subtieler en tevens gevaarlijker is de uitwerking van het vergeten van de ongenormeerde gegevens doordat, bijvoorbeeld bij statistieken, tevens vergeten wordt *hoe nauwkeurig de genormeerde gegevens zijn*: Eén op de twee, of 50% kan uit een totaal van net twee verkregen zijn of als een min of meer ruwe schatting uit een totaal van duizend of een miljoen.

Een typisch geval uit het jongste verleden, de koopsom-polisaffaire: 38 leden van de Tweede Kamer en 8 kabinetsleden zouden zich verrijkt hebben of zich hebben trachten te verrijken door door de mazen van de belastingnetten te glippen - getallen die klinken alsof de zegsman die het moest weten, hun namen kende en hun neuzen had geteld. Op zeker ogenblik merkte iemand op dat 38 respectievelijk 8 net (eventjes afgerond) *een vierde* was van 150 respectievelijk 33 d.w.z. van het totaal aantal Tweede-Kamerleden respectievelijk kabinetsleden.

Wel - kon je concluderen - de man die het moest weten, had vermoedelijk gezegd: *een kwart* (*of* 25%) van de Tweede Kamer en van het Kabinet heeft een koopsompolis - een uitspraak die klinkt of je er met de pet naar gooit. Het is de vraag of zo'n aantijging zo serieus zou zijn genomen om hem door een commissie van wijze mannen en vrouwen te laten uitzoeken, als

er van een kwart (of 25%) sprake was geweest. Maar iemand die het verhaal doorgaf, of degene die het bekend maakte, vertaalde die 25% in het netjes uitgerekende kwart van de zittende Kamer en het zittende Kabinet, dus in de cijfers 38 en 8, die een veel grotere betrouwbaarheid claimen dan het losjes opgeven van ‘een kwart’.

Wat is er dan fout aan, als je *een kwart van de Tweede Kamer en het Kabinet* vertaalt in 38 en 8?

Immers de berekening klopt toch. En toch is het fout - een vertaalfout. Net zo'n vertaalfout als wanneer je in Shakespeare's King Lear ‘*every inch a king*’ de ‘inch’ vertaalt met 2,54 cm.

Een ander voorbeeld waar het mis is met de evenredigheid:

> Een goede dobbelsteen hoort één op de zes keer een zes te vertonen.

Is dat hetzelfde als twee op de twaalf keer, als 100 op de 600 keer? Wel, je weet al dat het niet precies één op elke zes keer gebeurt - was dat het geval dan was de aardigheid er af.

De kans dat het *precies* één op de zes keer gebeurt is maar 40%.

De kans dat het *precies* twee op de twaalf keer gebeurt is nog minder, maar 28%. En dan gaat het snel bergafwaarts: De kans dat het precies 10 op de 60 keer gebeurt is al zo belachelijk klein, dat je hem gerust kunt verwaarlozen. Maar als je bij een dobbelsteen zegt ‘één op de zes keer een zes’ dan bedoel je dat ook niet als precies ‘één op elke zes keer’. Je bedoelt het als een soort gemiddelde - de kans bijvoorbeeld dat er pas bij 12 keer gooien de eerste zes komt is nog steeds 2%.

En de les: Het is niet allemaal evenredigheid wat de klok slaat. Je moet met verhoudingen en evenredigheden verstandig opereren. Maar dán kun je er ook veel mee doen.

Terug- en vooruitblik

Men denkt wel dat getal *de eerste wiskundige uiting in de ontwikkeling van de individuele mens en van de mensheid is en was. Zou u niet na lezing van dit opstel aan* verhouding *de prioriteit toekennen? En waarom wordt het onderwerp dan in het onderwijs zo verwaarloosd? Hoeveel benaderingswijzen ervoor zijn, en hoe goed die doordacht kunnen en moeten worden is hier uiteengezet: denk alleen maar aan ‘naar verhouding’, aan ‘interne en externe verhouding’ en aan ‘verhoudingsgetrouw’. Wat betekent ‘verhouding’ voor het ‘vooruitwijzend leren’ van opstel* 4? *Wat vindt u van hetgeen hier over verhouding is gezegd en van de contexten waarin verhouding is geplaatst in reken-wiskundemethoden terug*?

Om het aanvankelijk schattende ‘naar verhouding’ te preciseren, moet men meten. Hieraan is het volgende opstel gewijd.

7. Meten vanuit wiskundig standpunt

Het begin van meten

Getal, maat, gewicht en geld hebben vanouds veel met elkaar te maken. Desalniettemin gaat het meten ten dele aan het tellen vooraf. Je kunt tal van voorwerpen meten, eer je iets van getallen afweet.

‘Piet is groter dan Jan’ - dat kun je nagaan door ze met de achterhoofden tegen elkaar te plaatsen, met een latje op de kruinen, en te kijken naar welke kant het latje afloopt.

‘Piet is zwaarder dan Jan’ - laat ze maar op de wip gaan zitten.

‘Piet spreekt met een diepere stem dan Jan’ - dat kun je horen.

‘Van Amsterdam naar Arnhem is het verder dan naar Utrecht’ - nogal duidelijk, want Utrecht ligt ertussen.

Je hoeft de lengten, de gewichten, de toonhoogten, de afstanden niet altijd in getallen uit te drukken om te weten te komen wie groter, zwaarder, dieper is. Wie is het sterkste, wie kan het hardst lopen, wie kan het mooiste zingen - vanouds zijn er wedstrijden om rangordes van atleten, hardlopers, zangers te bepalen. Ook zonder stopwatch en andere moderne uitvindingen. Wat was de koudste winter, de heetste zomer sinds mensenheugenis - dit wisten ze ook zonder thermometer vast te stellen.

Het meest primitieve meten is een bepalen van volgorde. Neem zo'n ordebegrip, bijvoorbeeld ‘zwaarder dan’, of preciezer

... zwaarder dan...

waar bij de twee keer drie stippeltjes twee voorwerpen dienen te worden ingevuld. Of zo'n uitspraak waar is ga je met een weegschaal ook zonder gewichten na: A in de ene, B in de andere schaal en dan kijken naar welke kant het uitslaat.

Als

noch A zwaarder dan B, noch B zwaarder dan A,

beslis je

A even zwaar als B,

waar je ook voor mag zeggen

B even zwaar als A.

Om niet zoveel te hoeven schrijven, schrijven we maar kort:

$A \sim B$

en in plaats van A zwaarder dan C:

$A > C$.

We merken enkele wetmatigheden op:

Als A > B	Als A > B	Als A ~ B	Als A ~ B
en B > C	en B ~ C	en B > C	en B ~ C
dan A > C	dan A > C	dan A < C	dan A ~ C

Als	A ~ B
dan	B ~ A
Altijd	A ~ A

Je mag **>** ook lezen als ‘rent harder dan’, ‘is voedzamer dan’, ‘is slimmer dan’. De wetten van zopas blijven dan nog steeds juist.

Zoek meer voorbeelden! Mag je **>** ook lezen als ‘is neef van’, ‘is jarig ná’?

Een mooi voorbeeld is ook de hardheidsschaal. Je leest dan A **>** B als ‘A ritst B’. Het hardste is diamant. Met diamant kun je alles ritsen.

Schaal van Mohs

1. talk }	{ met de nagel
2. gips }	{ te krassen
3. calciet }	{ gemakkelijk met
4. fluoriet }	{ mes te krassen
5. apatiet }	{ moeilijk met mes
6. veldspaat }	{ te krassen
7. kwarts }	{ niet meer met
8. topaas }	{ vijl te krassen
9. korund }	{ maar geven kras
10. diamant }	{ op glas

> Een edelsteen nu moet minstens de hardheid 7 hebben om niet door het overal liggende stof dat voor een groot deel uit zand d.w.z. kwarts bestaat, te worden geschuurd en dof gemaakt. Wel worden mineralen uit de kwartsgroep in grote hoeveelheden als sieraad gebruikt wegens hun mooie kleuren - ze worden speciaal in Idar-Oberstein vervaardigd - maar men noemt ze dan liever geen edelstenen, maar sier- of kleurstenen (Duits Schmucksteine). De vroegere naam van ‘half-edelsteen’ voor kwarts, wordt door de edelsteenhandel bewust niet meer gebruikt: men vindt de ongunstige klank ‘half’ te kort doen aan het fraaie uiterlijk van deze stenen!

Met het ~-teken (even zwaar als) kun je (gewichts) klassen vormen. Je stopt alles wat even zwaar is in een klasse. Je kunt dan ook de klassen met elkaar vergelijken. Als A zwaarder is dan B, dan is elk voorwerp in de klasse van A zwaarder dan elk voorwerp in de klasse van B. In zo'n gewichtsklasse kun je een standaardgewicht kiezen. Een set gewichten bij een weegschaal geeft voor bepaalde gewichtsklassen standaardgewichten. Typisch is ook weer de hardheidsschaal; het is een schaal

van standaardstoffen; van een nieuwe stof probeer je wat hij ritst en waardoor hij wordt geritst.

De gewichtsklassen vormen, wat men noemt een geordende verzameling. Ze laten zich als het ware op een rij zetten, zeg naar toenemende zwaarte van de leden.

Meten en getal

Hoe krijgt het getal nu vat op het meten? Men is er niet tevreden mee te weten wie van die A, B, C de zwaardere is. B is bijvoorbeeld maar eventjes zwaarder dan A, terwijl C heel veel zwaarder is dan B. Hoe meet je zoiets?

Hierbij moet naast *vergelijken* volgens, zeg maar, gewichten een andere operatie meedoen, het '*samenstellen*'.

Jan is zwaarder dan Piet, maar als Lies nog bij Piet op de wip gaat zitten, zijn ze samen even zwaar als Jan. Ik heb Piet en Lies 'samengesteld' tot iets dat even zwaar is als Jan. Ik zeg 'samenstellen' en niet optellen. Optellen doe je met getallen. 'Piet + Lies' lijkt nergens op, maar omdat ik voor het samenstellen een teken moet hebben, gebruik ik maar eventjes $\oplus$ als symbool, dus

Jan ~ Piet $\oplus$ Lies.

Het kan ook gebeuren dat Jan even zwaar is als twee Pieten. Wat bedoel je hiermee? Al heb je er maar één, je gaat je een Piet* verschaffen, die even zwaar als Piet is en je constateert dat

Jan ~ Piet $\oplus$ Piet*.

Jan heet dan dubbel zo zwaar als Piet.

Net zo gaat het met dubbel zo lang en dubbel zo ver. Maar hoe zou het zijn met 'A zingt dubbel zo mooi als B'? Je kunt misschien wel een B* vinden, die precies zo mooi zingt als B, maar hoe stel je B en B* volgens hun zangkunst samen? Moet je ze gelijktijdig of achtereenvolgens laten zingen, om de zangkunst van het koppel B $\oplus$ B* met die van A alleen te vergelijken? Met 'dubbel zo slim' valt het misschien nog mee. Je laat A, B en B* een uur lang sommetjes rekenen en als A net zoveel klaarspeelt als B en B* samen, is hij even slim als zij, dus dubbel zo slim als elk afzonderlijk.

Of bent u het hiermee niet eens? 'Dubbel zo helder' - kan dit?

Ja, als je een blad papier op dezelfde afstand met één of twee gelijksoortige kaarsen verlicht wordt het dubbel zo helder.

Maar je moet met zo iets voorzichtig zijn. Als je dubbel zo hard muziek wilt maken, kom je er niet door dubbel zoveel mensen te laten zingen.

We begonnen met het grove meten van 'A is zwaarder, langer, slimmer dan B', 'A is even zwaar, even lang, even slim als B'. We komen nu tot het verfijnde meten, waarbij het gewicht, de lengte, de slimheid van A in die van B numeriek wordt uitgedrukt. 'Beter één vogel in de hand dan tien in de lucht' (in welk opzicht beter?), één vrouw is duizend mannen te erg (in welk opzicht?). Voor het kunnen uitdrukken van het gewicht enzovoort van A in dat van B zijn twee dingen vereist: je moet dingen kunnen vergelijken of ze even zwaar enzovoort zijn en je moet ze kunnen samenstellen. Dan pas kun je zeggen A is zo zwaar, lang, slim als een aantal B's.

Er was eens een volksstam, die ruilhandel pleegde en als volgt rekende:

1 slaaf is evenveel waard als 3 slavinnen plus 1 ezel
1 slavin is evenveel waard als 2 stieren plus 1 schaap
1 stier is evenveel waard als 2 koeien
2 koeien zijn evenveel waard als 5 ezels
1 ezel is evenveel waard als 4 schapen

Toen kwam er iemand op een idee: laten we alles in schapen uitdrukken. Een schaap was dus de wettelijke waarde-eenheid in deze economie. Dat kost zoveel schapen - zei de man die een huis wilde verkopen; zij kost zoveel schapen - zei de vader met een huwbare dochter.

Je noemt zoiets betalen in natura. Dit systeem werd afgelost door het betalen in klinkende munt. Als waarde-eenheid koos je een zekere hoeveelheid koper of zilver of goud.

Hetzelfde doe je altijd bij het numeriek meten. Je kiest een maateenheid: pond, voet, kilogram, duim, el, meter, schepel, mud, liter, dag, jaar, seconde, stuiver, duit, dollar, enzovoort. Je zorgt er verder voor dat je die eenheid voldoende kunt reproduceren, om te meten grootheden in de eenheden uit te drukken. Op de liniaal vind je vergelijkbare eenheden al afgetekend en samengesteld, maar als je een grotere afstand moet meten, stel je hem als het ware samen uit afstanden die je direct met de meetlat hebt uitgezet. Als je iets weegt, vergelijk je het met een samenstel van een aantal standaardgewichten. Weeg je met een unster, waar je een schaal afleest, dan komt het wegen als het ware op een afstand meten neer: hoe ver slaat de wijzer uit? En net zo is het bij het tijdmeten met de klok.

Als je maateenheden hebt ingevoerd, vergelijk je alles via die maateenheden - je meet met één maat. Als A 60 kg weegt en B 20 kg, weet je dat A drie keer zo zwaar is als B. Bovendien weet je: als B 20 kg weegt en C 40 kg, dan weegt het samenstel van B en C (we noemden het ook B $\oplus$ C) 20 kg + 40 kg en dat is 60 kg.

Is dat goed, 20 kg + 40 kg? Mag ik gewichten optellen of alleen maar getallen? Is dat niet zo iets als Jan = Piet + Lies?

Wel, 20 kg betekent niet 20 afzonderlijke kilogramgewichten. 20 afzonderlijke kilogramgewichten is een samengesteld voorwerp waarvan ik toevallig precies weet dat het 20 kg weegt. Mijn koffer is ook zo'n voorwerp en weegt misschien ook 20 kg.

20 kg is - los van zijn feitelijke realisering - een rekenbegrip, waarmee ik rekenoperaties uitvoer. In de natuurkunde noemt men zo iets ook grootheden en werkt er rekenkundig mee. Je drukt gegeven grootheden numeriek in zekere eenheden uit; het is een groot gemak dat je aan die maatgetallen kunt zien of ze even groot zijn, wie groter is en hoeveel keer zo groot hij is; bovendien vind je het maatgetal van een samengesteld voorwerp door de maatgetallen van de delen op te tellen.

Bij al die bewerkingen doet de maateenheid er niet toe. Als A 20 kg weegt en B 40 kg, dan blijft B dubbel zo zwaar als je de maateenheid van kg in ons verandert en het gewicht van A $\oplus$ B is hetzelfde of je het nu in kg of in ons uitdrukt.

Bewerkingen

Kun je met grootheden nu onbeperkt alle bewerkingen uitvoeren?

20 kg + 100 m zul je zeker niet toelaten (als je wilt zeggen dat een draad 20 kg zwaar is en 100 m lang, hoor je dat in elk geval niet zo te zeggen). Je kunt wel iets dat 20 kg zwaar is met iets samenstellen dat 100 m lang is, maar van het samenstel wil je dan toch óf de zwaarte óf de lengte weten (of allebei).

Kun je nog andere bewerkingen op verschillendsoortige grootheden loslaten?
Het meest bekende is het delen van afstand door tijd. 100 meter in 15 seconden afgelegd, dat is 100/15 meter per seconde. Je noemt dat ook de snelheid.
Als je

in de tijd t
de weg w

aflegt, dan is

w/t de snelheid.

Hier zijn t en w bepaald niet maar getallen. De tijd 15 bestaat niet; een maateenheid is onmisbaar. Het is bijvoorbeeld 15 s of 15 h; de weg 100 bestaat niet; het is bijvoorbeeld 100 m of 100 km.
Naar gelang van die twee gevallen is de snelheid

100 m/15 s

of

100 km/15 h

(Het eerste een hardloper, maar geen wereldrecord; het tweede een flinke tippelaar.)

Je kunt de uitdrukkingen vereenvoudigen:

100 m/15 s = 6⅔ m/s
100 km/15 h = 6⅔ km/h

en je leest die maatbepaling ook als meter *per* seconde, kilometer *per* uur. Soms geeft men de voorkeur aan m s^{-1}, km h^{-1}, dus sec^{-1} in plaats van 1/s, h^{-1} in plaats van 1/h.

Met m en km meet je afstanden,
met s en h meet je tijden,
met m/s en km/h meet je snelheden.

Als je op een oppervlakte van 10 m^2 een kracht van 500 kgf uitoefent, dan krijg je een druk van

500 kgf/10 m^2

en dat is

50 kgf/m^2

dus een druk van 50 kgf per vierkante meter. Is dat veel?

Boven elke vierkante centimeter staat een luchtzuil, die boven de hoogste bergen uitgaat en al wordt die lucht boven steeds ijler, toch oefent het gewicht van de lucht op een oppervlakte van 1 cm^2 een kracht uit van 1 kgf. De luchtdruk is dus 1 kgf/cm^2 = 10 000 kgf/m^2.

Een vierkante meter, wat is dat? Het is het prettige van ons matenstelsel, dat alle maten uit een klein aantal fundamentele maten zijn opgebouwd. Om oppervlakte en inhouden te meten ga je op de lengtematen terug. Een rechthoek met zijden a en b heeft de oppervlakte a · b. Ja..., maar is dat een wet of een afspraak? Ten dele het een, ten dele het ander. Neem een rechthoek van zeg 3 eenheden lang en 2 eenheden breed (figuur 7.1). Je kunt hem opdelen in 3 · 2 vierkanten, waarvan de zijde de eenheid is. Dat is een *wet*. De *afspraak* is dat je uit de

figuur 7.1

eenheid van lengtemeting een eenheid van oppervlaktemeting maakt, te weten het vierkant met als zijde de lengte eenheid. Dat is dan voor een vierkant met zijde 1 cm de vierkante cm, oftewel cm^2, voor een vierkant met zijde 1 m de vierkante m, oftewel m^2.

Analoog is het met de inhoudsmeting. Je werkt dan met als eenheid de kubieke cm of cm^3, dat is de inhoud van een kubus met ribbe 1 cm of de kubieke meter, of m^3, de inhoud van een kubus van rubbe 1 m. Op die manier wordt dan de oppervlakte van een rechthoek met zijden 3 cm en 2 cm:

$$3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 3 \cdot 2 \text{ cm}^2,$$

de inhoud van een plaat van 4 cm lang, 3 cm breed, 2 cm hoog:

$$4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ cm}^3.$$

Het kost even veel arbeid om een gewicht van 50 kgf 30 m hoog te tillen of 25 kgf 60 m hoog.

Je noemt de grootheid waar het hier om gaat: *arbeid*.

Het halve gewicht dubbel zo hoog tillen kost evenveel arbeid. Je berekent de arbeid daarom als produkt van de vereiste kracht (het op te tillen gewicht) en de vereiste hoogte. Om 50 kgf 30 m hoog te tillen is een arbeid nodig van

$$50 \text{ kgf} \cdot 30 \text{ m} = 50 \cdot 30 \text{ kgf m} = 1500 \text{ kgf m}$$

25 kgf 60 m hoog vereist dezelfde arbeid. Hoe vlug de motor het klaar speelt om de 50 kgf 30 m hoog te tillen hangt af van zijn (*arbeids*) *vermogen*. Om 50 kgf 30 m hoog te tillen in 10 seconden is een arbeidsvermogen vereist van

$$50 \text{ kgf} \cdot 30 \text{ m}/10 \text{ s} = 150 \text{ kgf m s}^{-1}.$$

De gewone eenheid van arbeidsvermogen is 1 watt, ongeveer gelijk aan 1/10 kgf m s^{-1}, of het duizendvoud ervan, de kilowatt.

Zet je een toestel met een vermogen van 2 kilowatt 3 uur aan de gang, dan verbruikt het

2 kilowatt · 3 uur = 6 kilowattuur.

Je kunt nagaan wat dit volgens het elektriciteitstarief kost.

Nieuwe grootheden

Uit de oorspronkelijke grootheden lengte, gewicht, tijd kun je door vermenigvuldigen en delen nieuwe grootheden vormen en door dezelfde bewerkingen krijg je maateenheden voor de nieuwe grootheden.

Wat gebeurt er nu als je van maateenheid veranderd, m door km of cm, kg door g, sec door h vervangt, enzovoort.
Wel,

1 km = 1000 m,
1 h = 3600 s.

1 km per uur is dus dezelfde snelheid als 1000 m per 3600 s, dus

1 km/h	= 1000 m/3600 s
	= 0,28 m/s
	= 28 cm/s

of met ons voorbeeld van zoëven:

100 km/15 h	= 100 000 m/54 000 s
	= 1,88 m/s

Een druk van 500 kg op 10 m^2 is

500 kgf/10 m^2	= 500 000 gf/100 000 cm^2
	= 5 gf/cm^2

dus 5 gram per vierkante centimeter.

Een rechthoek van 3 m bij 2 m heeft een oppervlakte van

$$3 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 6 \text{ m}^2$$

of

$$30 \text{ dm} \cdot 20 \text{ dm} = 600 \text{ dm}^2$$

of

$$300 \text{ cm} \cdot 200 \text{ cm} = 60\,000 \text{ cm}^2$$

en analoog met de inhoudsmaten.

Je kunt dus gemakkelijk van de ene maateenheid naar de andere overstappen. Waarvoor bezig je nu bij dezelfde grooteenheid verschillende maateenheden? Wel,

als ik de lengte van een kamer in meters wil meten, zal het misschien niet precies uitkomen, zeg 5 m en nog iets.

Dat iets is te klein voor een meter en ik ga het in dm meten, zeg 6 dm en nog iets. En dat nog iets blijkt 3 cm te zijn en nog iets. Zo kan ik doorgaan met de maateenheid telkens weer onder te verdelen. Wil ik dan toch alles in meters uitdrukken, dan moet het met kommagetallen geschieden, zoals

5,63... m.

Terug- en vooruitblik

Het was erg concreet. Laten we de vragen even concreet stellen.

1. *Wat heeft meten met tellen te maken*?
2. *Kun je 'toonhoogte' meten door een telprocedure*?
3. *Ken je voorbeelden van metingen waarbij het subjectieve element niet geheel te elimineren is*?
4. *Welke grootheden kun je echt 'objectief' meten*?
5. *Hoe tracht men leerlingenprestaties zo objectief mogelijk te meten*?
6. *Vertel iets over het verband tussen getal, maat, meten, geld en gewicht*.
7. *Wat zijn de karakteristieke eigenschappen van de orde 'is zwaarder dan'*?
8. *Noem ze ook voor de orderelatie 'is knapper dan'*.
9. *Hoe kun je theoretisch tot een verzameling standaardafstanden komen*?
10. *Bedenk een zinvolle achtergrond voor Westertoren + Martinitoren > Domtoren*.
11. *In welk opzicht kun je het invoeren van geld als betaalmiddel vergelijken met het meten van gewichten*?
12. *Rekenoperaties zijn bedoeld voor getallen*.
    Je kunt wel zeggen 5 × 3 = 15, *maar niet δ δ δ δ δ + δ δ* = 7.
    Waarom is de uitspraak 5 km + 3 km = 8 km *nu toch juist vanuit wiskundig standpunt en* 5 liter water = 5 kg *niet*?
13. *En hoe zit dat met* 5 km × 3 km?
14. *Kun je iets vertellen bij de operatie* 50 km/1 uur?

Nu een geheel andere visie. Minder wiskunde en meer kinderen in het beeld.

8. Cognitieve ontwikkeling - kinderen geobserveerd

Cognitieve ontwikkeling - een term uit de psychologie, maar wie tot u spreekt is geen psycholoog. Ik ben een wiskundige die zich ook nog voor andere zaken heeft geïnteresseerd, onder meer voor het wiskundeonderwijs, op alle niveaus, en die sinds enkele jaren zijn hoofdtaak in ontwikkeling van wiskundeonderwijs heeft gezien. Dit bracht met zich mee: onderzoek. Niet achter het bureau, maar: kinderen, mensen observeren in hun ontwikkeling, in hun leerprocessen, en daarmee ben ik bij het onderdeel van de titel van mijn lezing achter de streep aangekomen.

Maar laat ik nog eens naar vóór de streep kijken. Cognitieve ontwikkeling - is dit werkelijk iets waarmee psychologen zich bezighouden? Wel, er bestaat zoiets als een ontwikkelingspsychologie, maar wat is dat? Laten we naar de methodologie van dit soort onderzoek kijken. Men observeert kinderen, groepen van kinderen van verschillende leeftijden. Vierjarigen, zesjarigen, negenjarigen, twaalfjarigen. Men experimenteert met hen, laat ze cognitieve taken uitvoeren en kijkt hoe ze het doen, toetst, vergelijkt voor de verschillende leeftijden hoe het gebeurt, of ze slagen of niet. Men bewerkt dit materiaal min of meer statistisch. De percentages slagers voor de verschillende taken groeien van bij de 0% naar bij de 100% en dat is dan de cognitieve ontwikkeling. Men noemt dit cross-sectional research, dwarsdoorsnedeonderzoek. Men zou hiertegenover kunnen plaatsen: longitudinaal onderzoek. Een groep kinderen door de jaren in hun ontwikkeling volgen - maar u begrijpt dat dit op enorme praktische moeilijkheden stuit. Wie kan zo iets uitvoeren? Ouders en onderwijzers in huis en school - ja - maar niet psychologen in hun laboratoriums. Elk onderzoek duurt een beperkte tijd; het moet af, subsidies duren niet eeuwig, onderzoek moet gepubliceerd, een doctorandus wil wel eens promoveren. (Een enkele keer gebeurt zoiets dan toch wel, maar dit is uitzonderlijk.)

En nog een bezwaar: het laboratorium als plaats van onderzoek. Een vooropgezet stel van taken en toetsen. Kunstmatige, geestig verzonnen taken en toetsen, opgelegd door onderzoekers aan kinderen, in ongewone situaties en in een mengelmoes van volwassen en baby taal. Niet zelden ook dubbelzinnig of misleidend, hetzij omdat de onderzoeker zelf niet helder voor ogen staat wat hij wil, hetzij omdat hij het de proefpersoon niet te gemakkelijk mag maken, willen de toetsen voldoende discrimineren.

Maar laat ik tot de kwestie van het dwarsdoorsnedeonderzoek terugkeren. Het is niet eens zo'n dwaas idee en er is verdienstelijk werk onder. Ook in de natuurwetenschappen is zo iets niet onbekend. Het heelal zoals we het op dit ogenblik zien, is een gemengde populatie. De sterrenkundigen zijn er in geslaagd die in dwarsdoorsneden van ouderdom te splitsen en zodoende de ontwikkeling van het heelal te bestuderen, van de big bang in den beginne, over gaswolken, over telkens opnieuw gevormde kleine en grote sterren van lange en korte levensduur, tot uitgebluste sterren en tot black holes.

Ze zijn erin geslaagd dank zij hun inzicht in fundamentele natuurkundige wetten en theorieën - iets dat zijns gelijke in de psychologie niet kent. Wat kan men dan wel in de psychologie van het dwarsdoorsnedeonderzoek leren, of zelfs van onderzoek waarbij dezelfde groep kinderen in tussenruimten van enkele jaren wordt getoetst? Men kan op zijn hoogst uitspraken doen over de ontwikkeling van het gemiddelde kind. En daar gaat dan vrijwel de hele ontwikkelingspsychologie over, de ontwikkeling van het gemiddelde kind, met desnoods nog statistische parameters, die laten zien hoe ver de populatie rond het gemiddelde gemiddeld strooit. En dat dat niet weinig is, kan iedereen - ook zonder psychologisch onderzoek - met het blote oog waarnemen, om het te beamen.

Voor de pedagoog is dit nu het kernprobleem. Wie voed je op, wie geef je les, voor wie ontwikkel je onderwijs? Voor het gemiddelde kind, dat een rekenkundige fictie is, voor de slow learner, voor haantje de voorste? Wiens ontwikkeling interesseert je, wiens ontwikkeling wil je helpen bevorderen? Wel, uiteraard die van allemaal. En allemaal, dat is iedere enkeling, niet geisoleerd, maar dan ook weer in de sociale context van gezin, straat en school. Je zou dus, om er iets aan te kunnen doen, individuele ontwikkelingen moeten observeren. Het is uiteraard wel eens gebeurd. Uiteraard zelden, want het is ontzaglijk moeilijk. Ouders zouden de meest aangewezenen zijn om het te doen, maar wie vertelt hun waar ze op moeten letten, wat ze moeten noteren, wat de moeite waard is? Ik kom op de vraag terug.

Ondertussen nog eens ‘cognitieve’ ontwikkeling. Wat is dit? Het is vreemd, dat dit in de ontwikkelingspsychologie overwegend geïnterpreteerd wordt als: wiskundige ontwikkeling, getalbegrip, ruimtebegrip, logisch begrip. En het is nog vreemder, dat ik als wiskundige de ontwikkelingspsychologen hiervoor moet berispen. De voorliefde voor de wiskundige ontwikkeling heeft een duidelijke oorzaak: In de cognitieve sector is wiskunde datgene dat het gemakkelijkst is te toetsen - of althans, dat verbeelden ze zich. Nog een bezwaar: het cognitieve is maar een sector van de mentale ontwikkeling. Er is ook een taalkundige ontwikkeling en er is een affectieve ontwikkeling. Ze zijn zo nauw verstrengeld, dat je ze wel als aspecten kunt onderscheiden, maar niet van elkaar scheiden.

Laat ik met de taalkundige ontwikkeling beginnen - voor mij nog steeds het meest verbazingwekkende ontwikkelingsverschijnsel. Hoe speelt een kind het klaar, in luttele jaren zijn moedertaal te leren? Ik heb de literatuur over de taalontwikkeling niet of nauwelijks bestudeerd, maar deskundigen, aan wie ik geloof schenk, hebben me verzekerd, dat ook daar nauwelijks meer dan dwarsdoorsnedeonderzoek is verricht en dan nog vrijwel alleen wat het vocabulaire aangaat, en dat over de ontwikkeling van syntactische structuren weinig bekend is.

Dit heeft ten gevolge dat psychologen in het onderscheiden tussen taalkundige en cognitieve ontwikkeling nogal te kort schieten. Cognitie wordt in het algemeen taalkundig kenbaar gemaakt, maar het beheersen van de taalkundige middelen om zo'n cognitie kenbaar te maken moet van de cognitie zelf worden onderscheiden. Als voorbeeld, een notitie omtrent het gebeurde met een kind (3:8):

> Hij vindt op de stoep van de straat een glazen knikker: ‘Als ik hard duw, zou hij op straat rollen.’ (Hij gebruikt de irrealis meestal alleen in de hoofdzin of als antwoord op een vraag: ‘anders zou...’) Hij duwt. De knikker rolt onder een band van een bij de stoep geparkeerde auto. Hij kan hem met zijn vingertjes niet te pakken krijgen. Ik wijs hem een stokje. Hij, op het gezicht: ‘Dit is niet hard genoeg.’ Inderdaad een slap stokje, maar het lukt er wel mee.

Dat hij een stokje aanziet of meent te kunnen aanzien, of je er als hefboom voldoende kracht mee kunt uitoefenen, is een cognitieve ervaring. Dat hij uit het uiterlijk van het stokje gemotiveerd durft te concluderen of het gaat, is cognitief inzicht. Dat hij dit inzicht verbaal kan uitdrukken, is een taalkundige vaardigheid, die van de cognitieve te onderscheiden is. Wel, u zoudt kunnen opmerken, dat ‘hard’ niet het juiste woord is. Het had ‘stevig’ moeten zijn, of ‘stijf’ of ‘rigide’, en inderdaad zijn er psychologen die, als in een antwoord niet het juiste woord wordt gebruikt, falen constateren. Jammer genoeg is in het door Piaget geïnstigeerde onderzoek naar ‘conservatie’ het verbale element zo sterk, dat veelal niet meer dan dit wordt getoetst.

Nog een verhaal over hetzelfde jongetje, toen één jaar jonger (2:8):

> Hij vindt de dop van een fietsbel. Op het bordes van Nieuw Clarenburg speelt hij ermee. Ik waarschuw hem dat de dop eraf kan rollen. Het gebeurt inderdaad. Hij kijkt de bel achterna en zegt, met zijn vinger wijzend: ‘Zó halen, de trap af.’ (De trap was op plm. 15 meter afstand van de plaats waar het gebeurde.)

Hij had, zonder iets te zeggen, naar de trap kunnen toelopen. Hij maakte een plan en dat is een cognitief verschijnsel. Hij wist het plan te *formuleren* en dat getuigde van een zeker taalkundig niveau.

> Een meisje van haast 5. Ze beschrijft een weg. Met opgestoken onbewogen vingers: ‘En dan ga je zó, en dan ga je zó, en dan ga je zó.’ Je voelt dat ze het precies weet, maar het niet kan uitdrukken, zelfs niet met gebaren. Haar broer, twee jaar ouder: ‘Dan ga je over de sluisjes, en dan ga je zó,’ terwijl hij met zijn vinger naar rechts wijst. Hij beschikt over uitdrukkingsmiddelen, al zijn ze niet puur verbaal.

Nog een voorbeeld van de verstrengeling van het cognitieve en het taalkundige.

> Wandeling met de jongen (5:3) aan de overkant van het Amsterdam-Rijnkanaal, één rechte lijn van de Vleutenbrug naar de Meernbrug. Op ongeveer een derde vraag ik hem of we al op de helft zijn. Hij kent het woord niet (of schijnt het niet te kennen). Ik laat hem bij een stokje de helft zien, breek het (onnauwkeurig) door, hij constateert dat het ene deel iets langer is. Ik herhaal de vraag omtrent de weg tussen de bruggen. Hij zegt, dat het niet de helft is, maar wijst het verkeerde deel als langer aan. Ik praat nog wat over afstand, ‘ver’, enzovoort, maar hij is niet geinteresseerd. Wanneer we inderdaad op de helft zijn geeft hij het spontaan aan, maar zegt: ‘Hier begint het midden.’ Hij bedoelde blijkbaar ‘de tweede helft’. Hij kende dus het woord ‘midden’, maar niet ‘helft’, of het laatste alleen in andere verbanden dan afstand.

Ondanks het ontbreken van taalkundige termen is hij met het cognitieve substraat ervan vertrouwd. Hij begrijpt wat afstand is, wat de helft is en brengt het in verband met lengtes van lange voorwerpen.

Kinderen geobserveerd - staat in de titel. Terloops heb ik u proefjes aangeboden. Misschien haalt u de schouders op over die nietige, die onbenullige observaties. Ik waarschuw u meteen. Ze zijn, ook in het vervolg, allemaal van dit soort. Eén keer heb ik een grootse proevenreeks met een jongen van 5½ genomen, maar dat was dan ook de enige keer, dat ik bewust geëxperimenteerd heb. Al het andere is terloops gebeurd en waargenomen - in de wandeling. Mag ik daarom wat ik heb geobserveerd, spontane ontwikkeling noemen? Welneen. Het kon weleens spontaan starten, maar een woord, een blik, een geste van de waarnemer is voldoende om het spontane een bepaalde kant op te buigen. Is dit erg? Welneen. Er is spontaniteit, maar voor alle ontwikkeling is er ook een sociale context. Dwarsdoorsneden zijn onvoldoende, om ontwikkeling te achterhalen, zolang er geen theorie is om de dwarsdoorsneden te verbinden. Longitudinale observatie is praktisch onmogelijk. Wat heb je dan aan die terloopse observaties, in de wandeling? Om dit uit te leggen moet ik op heel wat filosofie een beroep doen, en laat ik daarmee beginnen.

Hoe verwerven we onze algemene voorstellingen, begrippen, cognities? Vele handvaardigheden worden door voortgezette oefening en eindeloze herhaling verworven en zelden is tot nu toe de mening bestreden, dat het met algemene inzichten net zo gaat. Door inductie, zeggen de filosofen, worden de algemeenheden uit een overvloed van voorbeelden afgeleid. De voorstelling, het begrip van de hond - zeggen ze - wordt geconstitueerd door kennis te maken met een groot aantal representanten van de soort ‘canis’; we weten dat honden blaffen omdat we het talloze malen gehoord hebben; dat stenen vallen, omdat we het talloze malen hebben gadegeslagen. En zo zou het verder gaan in de wetenschap: Inductie, veralgemening uit tal van voorbeelden.

Wie de wetenschap kent, weet dat daar niets van deugt. Eén slinger van Foucault was voldoende om de wenteling van de aarde te demonstreren en de talrijke herhalingen waren er alleen om een groot publiek te overtuigen. Eén proef besliste of het licht een longitudinale of transversale trilling was; het golfkarakter van de röntgenstralen werd door één röntgenfoto van een kristal beslist en al die herhalingen dienden er alleen voor om de golflengtes van speciale stralingen en de structuur van speciale kristallen te bepalen. Talrijke herhalingen van dezelfde waarnemingen - dat komt voor, maar om heel andere redenen dan om te generaliseren, bijvoorbeeld om meetfouten te elimineren en meetpunten van een functie te bepalen.

Hoe is het nu met de vóórwetenschappelijke cognitie gesteld, hoe met leerprocessen die tot algemene voorstellingen, begrippen, inzichten leiden? Is het niet uiterst onwaarschijnlijk dat biologische wezens, die de bekwaamheid bezitten om te leren, zo inefficiënt geconstrueerd zouden zijn, dat ze talrijke voorbeelden nodig hebben? Integendeel, men zou menen dat ze zo voorgeprogrammeerd zijn, dat ze met weinig voorbeelden, met een enkel voorbeeld kunnen volstaan.

> Een jongetje, nog geen jaar oud, die nog kroop, had tot levensruimte een tweekamerwoning op de Oude Gracht - de achterkamer een trede hoger dan de straatkamer. Na de eerste keer dat hij van de achterkamer naar de voorkamer kroop en bij die trede op zijn hoofd viel, draaide hij zich *elke* keer, wanneer hij van de hogere naar de lagere kamer moest, om.
>
> Op Paaszondag drie jaar geleden had ik in het Panbos Paaseieren verstopt voor een vierjarige die ze moest zoeken. Om elke boom had ik er drie neergelegd, en na het *eerste* drietal zocht die jongen er systematisch bij *elke* boom drie.
> *Eén* ontmoeting met een agressieve zwaan met de jongen was voor hem voldoende om te weten dat zwanen agressief kunnen zijn.
> De vloerbedekking in mijn huis is een ruwe sisalmatting. Al mijn kruipende kleinkinderen zijn vanaf de *eerste* aanraking van hun blote knieën met de mat met opgetrokken knieën gaan kruipen, terwijl ze op linoleum en kleden normaal kropen.

Een ezel stoot zich geen twee keer aan dezelfde steen - is het gezegde - maar volgens de gelijkte filosofie is leren een continu proces dat om talloze voorbeelden vraagt.

Ik weet wel dat er ook tal van gezegden zijn om die filosofie te steunen: Gutta cavat lapidem, non vi sed saepe cadendo - Het water holt den harden steen, en dat maar door den tijd alleen; steter Tropfen höhlt den Stein - de aanhouder wint; elke dag een draadje is een hemdsmouw in een jaartje. Maar mensen zijn geen stenen en geen uit losse draadjes geweven hemdsmouwen. In luttele jaren zijn hun attitudes gevormd - taal, gedrag, karakter, voorstellingen, begrippen. Waar blijft daar de tijd voor het leren bij kleine stapjes, de talloze ervaringen, om dat allemaal te modelleren? Toch schuilt er een waarheid in dit verhaal van de druppel die de steen uitholt, van het ‘elke dag een draadje’. Dit vind je niet zo maar uit. ‘Ik heb het je nu al honderd keer gezegd’ is het bij het opvoeden. 99 keer is klaarblijkelijk niet voldoende. Trouwens dit ‘ik heb het je al honderd keer gezegd’ heeft de moeder ook al honderd keer gezegd. De 99e keer is ze nog niet van de nuttelоosheid overtuigd geraakt. Vaders maken kortere metten. Maar onderwijzers doen het als de moeders. Als 99 sommetjes voor het begrip van de breuken of de staartdeling niet voldoende blijken, moet er een honderdste bij. Of om het met de moderne onderwijskundige methoden van differentiatie te zeggen: Wat de A-leerling met één som bijgebracht wordt, daarvoor krijgt de B-leerling er tien, en de C-leerling er honderd, terwijl men zich zou moeten afvragen of niet juist de C-leerling behoefte had aan de unieke, de paradigmatische opgave.

Er is dus toch iets van aan, van dit leren uit talrijke voorbeelden, in eindeloze herhaling, om algemene voorstellingen, begrippen, inzichten, attitudes te verwerven. Niet als fundamentele waarheid, maar als een techniek van onderwijzen en opvoeden, die eenvoudig helemaal mis zou kunnen zijn. Maar het kost veel minder moeite de lerende met een douche van talloze voorbeelden te overspoelen, dan naar het ene - paradigmatische - voorbeeld te zoeken dat het hem doet.

Ziedaar een verkeerde filosofie, die een verkeerde techniek heeft voortgebracht - de filosofie alsof algemene voorstellingen, begrippen, inzichten,

attitudes door generalisatie uit talloze voorbeelden verworven worden, alsof leren een proces van kleine stapjes, een continu proces was. Wel ja - het opdreunend leren van tafels van vermenigvuldiging en het steeds maar verder trainen naar nieuwe snelheidsrecords op de korte baan - daar klopt het voor. Maar in de echte leerprocessen, wat daar telt, zijn de discontinuïteiten, de sprongen.

Hoe kun je cognitieve ontwikkeling achterhalen - ik bedoel van het individu, niet van de gemiddelde mens? Een longitudinale observatie - dit is onhaalbaar; en het hoeft ook niet. Als er niets gebeurt, hoef je ook niets te observeren. Wat je wel kunt, is: uitkijken naar de discontinuïteiten, de sprongen in de ontwikkeling. En daarvoor moet je naar het individuele kind kijken. Elk kind heeft in zijn ontwikkelingslijn van die discontinuïteiten. Neem je het gemiddelde over zoveel kinderen, dan vlak je die sprongen uit. Het gemiddelde kind vertoont inderdaad een continue ontwikkeling. Maar kijk je scherper, naar de enkeling, dan neem je de sprongen waar, en wat mij betreft, zijn zij het enige waar het op aankomt.

Daarom heb ik dan in de laatste jaren mensen geobserveerd. Ter wille van inzicht in de cognitieve ontwikkeling heb ik getracht discontinuïteiten in hun leerprocessen op te sporen. Dit is bij kleine kinderen gemakkelijker dan bij grote mensen. Zo'n discontinuïteit is vaak een Aha-Erlebnis, dat met grote emotie gepaard gaat. Ouderen laten daar minder van blijken - ze zijn wat je noemt - blasé. Kinderen zijn minder geremd. Ze laten, wanneer ze iets groots ontdekt hebben, hun gevoelens de vrije loop. Ik heb bij mijn observaties ook deze affectieve uitingen genoteerd. Ik deed het heel bewust; ik zei immers daarstraks al dat in de ontwikkeling het cognitieve, het taalkundige en het affectieve niet van elkaar te scheiden zijn. Weer eens het jongetje van de fietsbel (2:8):

> We rijden met hem door de Veluwe waar een geweldige storm veel bomen heeft geveld. Het meest indrukwekkende voor hem is, dat dit hetzelfde hout is als waarmee zijn vader thuis timmert. Hij raakt er niet over uitgepraat - een hele week niet - ‘Bastiaan bomen zagen.’

Ik vertel hier heel onbenullige verhaaltjes - ik waarschuwde u al eerder. Misschien vindt u me kinds. Inderdaad, ik leef mee met een jongetje van nog geen drie, voor wie dit - de gelijksoortigheid van hout in het bos en houten planken - een geweldige ontdekking is en ik ben niet te oud om zijn Aha-Erlebnis mee te voelen. (Of ben ik er net weer oud genoeg voor?) Al dergelijke dingen heb ik immers ook eens een keer geleerd, zeker ook met Aha-Erlebnissen, die ik inmiddels vergeten ben. (Maar ik herinner me nog tal van discontinuïteiten uit mijn eigen leerprocessen, vanaf de prilste jeugd tot nu toe.)

Een leerproces van een achtjarige.

> Na een gemodder in tegenstrijdigheden ontdekt hij plotseling dat een honderdste meer is dan een duizendste. Opgewonden loopt hij met de vraag ‘wat is meer, een honderdste of een duizendste?’ naar zijn vader, naar zijn moeder, naar alle buren

> - ik weet niet naar wie nog meer. Twee weken later is hij van deze ontdekking nog dusdanig van streek, dat hij ook mij weer die vraag stelt.

Een ander verhaal van de knutselaar (4:3):

> Op straat vindt hij een stuk van een hek, een platte ijzerspiraal. Al wandelende experimenteert hij met een dikke rubberring die hij eerst horizontaal over de draad schuift (‘de loopweg’), dan schuiner. Tenslotte houdt hij de draad loodrecht, waarbij de vallende ring koddige toertjes uithaalt. Hij pakt een klein stukje plastic met een gat erin uit zijn zak, waarmee het effect nog fraaier wordt. Hij neemt een dop van een fles: ‘Daarmee moet ik ook iets doen.’ Ik vertel hem dat hij er een gat in kan boren, hetgeen tot een technisch gesprek aanleiding geeft. Hij denkt - zoals altijd - hardop na. Hij zegt ongeveer ‘een moer heeft een gat waar de schroef in past,’ haalt met vakkundig gebaar een moer uit zijn zak (er zaten er twee in) en laat die langs de ijzerdraad zakken - een allerkoddigst effect. Ik: ‘Je bent een uitvinder, wat heb je daar allemaal uitgevonden!’ Ik betwijfel of hij het woord ‘uitvinder’ kent, maar eventjes later zegt hij: ‘Ja, ik heb iets uitgekiend.’ Hij demonstreert zijn ontdekking trots bij Oma en thuis.

Ik vertel dit zo uitvoerig, omdat je er zoveel van kunt leren. De jongen heeft nooit iets dergelijks gezien - hij had er anders gewag van gemaakt. Hij hoefde niet talloze malen te proberen. Na de eerste proef voltrok hij de juiste generalisatie: het ding moest een gat hebben. Mijn ingrijpen veroorzaakte alleen de formulering met het woord ‘gat’, maar beter had ik helemaal niet ingegrepen. De jongen generaliseert niet alleen, hij zoekt ook naar verbeteringen. Bovendien weet hij, dat hij iets belangrijks heeft ontdekt. Kan hij verklaren, waarom de dingen zo koddig tuimelend vallen? Ondertussen misschien wel - hij is nu 2½ jaar ouder.

Nog een voorbeeld van de signalerende emotie, waarmee een grote ontdekking gepaard kan gaan.

> Ik wandel met het jongetje (haast 5 jaar) langs het Amsterdam-Rijnkanaal, waar bij de Meernbrug een - ondertussen weer onderbroken - verbreding van de kanaalbedding begonnen is. Ineens barst hij uit in een opgewonden onsamenhangende stortvloed van woorden, zoals ik niet eerder van hem heb gehoord. Wanneer hij gekalmeerd is, verneem ik iets, dat mij aan de geloofwaardigheid van mijn eigen oren zou kunnen doen twijfelen. Het komt er op neer dat ze er voor de weggebaggerde aarde water moeten bij doen. Ik was er zo verbaasd over dat ik op het formele element niet inging en hem een lezing hield over waar het water vandaan kwam en de kringloop van het water.

Het hier gebeurde is zo verbazend, omdat het een teken is van wat Piaget conservatie noemt, ver beneden de leeftijd die volgens de psychologische laboratoriumproeven hiervoor bepaald is - ontdekkingen in het vrije veld contra de dwangbuis van het laboratorium. Meermalen in de volgende maanden geeft hij - met dezelfde opwinding - blijk van het ontdekken van conservatieverschijnselen, wanneer iets overgegoten wordt van een breed in een smal vat, wanneer bij het indompelen van zijn hand het water in een weckglas stijgt. Wanbegrip ten aanzien

van conservatie doet zich, volgens mijn ervaringen, bij kinderen alleen in kunstmatige laboratoriumsituaties voor.

U mag van mij als wiskundige verwachten, dat ik ook aandacht heb geschonken aan de ontwikkeling van het getalbegrip, vooral aan zijn eerste opkomst in de ontwikkeling. In één geval ben ik er vlak bij geweest en in een ander heb ik haar meebeleefd. U weet zeker dat vele kinderen lang voor ze enig getalbegrip hebben, leren tellen, aanvankelijk wanordelijk, later op orde, maar met omissies en tenslotte netjes, soms tot 100 toe, zonder dat ze weten wat de getallen betekenen. Het tellen is een ritmisch gebeuren, zoals een versje opzeggen, een liedje zingen of touwtje springen. Het jongetje dat ik bedoel (4:3) weigerde te tellen, hoewel hij al heel wat telwoorden behoorlijk kende.

> Op een avond - we zaten met zijn zessen aan tafel - heft hij triomfantelijk zijn lepeltje met zes aalbessen op: ‘Zoveel zijn wij.’ Ik: ‘Waarom?’ Hij: ‘Ik zie het zo.’ En dan doorgaande: ‘Twee kinderen, twee volwassenen, twee Opa en Oma.’ We zaten inderdaad zo aan tafel, hij en zijn zusje tegenover elkaar, zijn ouders, zijn grootouders.

Een dag later, in het Park Oog in Al.

> Hij neemt vier sneeuwbessen op zijn handpalm: ‘Zoveel wonen we thuis.’

Kenmerkend voor het gebeurde is de emotionele binding van het getal: een hoeveelheid voorwerpen met een hoeveelheid mensen. Niet veel later begon hij systematisch te tellen.

Dit is, naar ik al opmerkte, een ongewone ontwikkeling. Kinderen verschillen. Wat is dan de zin van de individuele observaties? Wat heb je eraan de afzonderlijke kinderen in hun ontwikkeling te observeren, wanneer die observaties niet voor generalisatie vatbaar zijn? Ik zou hierop met een tegenvraag kunnen antwoorden: Wat heb je aan generalisatie van ervaringen, die opgedaan zijn in kunstmatige laboratoriumsituaties? Maar zo gemakkelijk wil ik het me niet maken.

Het zal u - aangenaam of onaangenaam - hebben getroffen, dat ik over doodsimpele gebeurtenissen heb bericht alsof ze grote ontdekkingen waren. Alsof? Neen, het waren echt grote ontdekkingen, en het zullen grote ontdekkingen blijven, voor elk kind dat ze in zijn ontwikkeling opnieuw moet doen. Je kunt er later de schouders over ophalen, en ook dit is een teken van ontwikkeling. Maar wie cognitieve ontwikkeling wil bestuderen, mag er zijn schouders niet over ophalen. Integendeel, hij moet er naarstig naar zoeken. Als we weinig van cognitieve ontwikkeling afweten, zou de reden ervan niet kunnen zijn, dat we het tot nu toe te ver, te hoog hebben gezocht, dat we over wat ons onbelangrijk leek, argeloos heen zijn gestapt? Als we willen weten wat in de ontwikkeling belangrijk is, moeten we naar de onbelangrijkst lijkende gebeurtenissen speuren en als we er een hebben gevonden, moeten we zeggen: Ja, ook dit moet worden geleerd.

Want, weten we wat een mens allemaal moet leren? We hebben langzamerhand een berg van tradities in leerplannen opgetast en in leerboeken en lessen geëxpliciteerd. Het meeste en belangrijkste leren wij mogelijk buiten die boekjes en de officiële lessen om. Wij? Ja, wij - de bevoorrechten. Ook zij? De andere helft? Die helft, die geen breuken kent, geen staartdeling,

geen verhoudingen - ik houdt het maar bij het rekenen, maar u mag er best ook taal bij halen en wat in de CITO-toetsen algemene kennis heet.

> We hadden eens een themaatje - drie à vier lesuren voor een lbo-klas ontworpen, een detectiveverhaal met wat wiskunde erin. Heel leuk - zei iemand - maar er zijn geen wiskundige leerdoelen uit te halen. We probeerden het desniettemin in de klas uit; wij lieten de leerlingen in leerprocessen op het ontwerp reageren, en ziedaar, er bleken er wel twintig in te zitten. Twintig wiskundige doelen, waard om in leerprocessen na te streven en alle gloednieuw, in geen leerdoelenlijst te vinden.

Waarom leerprocessen te observeren? Alleen al om - vooroordelen overboord zettend - erachter te komen wat mensen allemaal moeten leren. Ook hoe ze leren, hoe ze kunnen leren, hoe geleerd kan worden - uiteraard. Erachter trachten te komen, niet ter wille van de wetenschap, maar om er iets mee te doen.

Maar wat heb je aan die berg van ervaringen - het is langzamerhand een berg geworden. Ze zijn in ontwikkeld onderwijs ingebouwd, zwart op wit op werkbladen en in cursussen. Is dit voldoende? Je moet ook eisen, dat zij die ermee willen werken - onderwijzers, leraren - het eruit kunnen halen en om daar zeker van te zijn moet je ook hun leerprocessen observeren. Je vraagt echter nog iets anders: die berg van ervaringen te ordenen - theorie noem je het dan. Waar haal je de middelen om te ordenen vandaan? Uit een theorie, die je zelf nog moet ontwikkelen? Het lijkt een vicieuze cirkel, maar ergens moet je hem trachten te doorbreken. Je wilt iets te weten komen over cognitieve ontwikkeling. Wat heb je dan aan al die anekdoten, waarvan ik u er enkele heb verteld?

Wel, uit de wijze waarop ik ze heb verteld, zal u duidelijk zijn geworden, dat het voor mij meer waren dan anekdoten. Ik heb niet wat ik heb waargenomen te kust en te keur genoteerd, maar alleen datgene wat me te denken gaf. Gedachten bij elkaar vormen nog geen theorie, maar elke gedachte kan aanzet tot theorie zijn.

Laat ik u dit besparen. Het was mij nimmer om theorie begonnen. Ik deed - met anderen - aan ontwikkeling van wiskundeonderwijs. Om er iets aan te kunnen doen, heb ik - hebben wij - leerprocessen geobserveerd, en in de leerprocessen het meest frappante, de discontinuïteiten. We hebben er bij het ontwikkelen van wiskundeonderwijs van geprofiteerd. Daar had ik het al over. Ik wil toch nog iets anders beklemtonen, een meer formeel element: het feit als zodanig van het kijken naar leerprocessen, met het doel er iets van te begrijpen - de bewustmaking van wat je beleeft en doet. Ik beschouw dit voorlopig als het meest essentiële; de mentaliteit van het intelligent observeren van leerprocessen. Het is niet iets dat we voor de ontwikkelaar en de onderzoeker willen reserveren. We propageren dit bewust beleven van het onderwijsleerproces bij anderen, bij onderwijzenden, bij opleiders en bij hen die opgeleid worden en we bieden hun materiaal aan, dat deze mentaliteit moet bevorderen. Op die manier hebben we bijvoorbeeld stagemateriaal voor toekomstige onderwijzers, de studenten van de Pedagogische Academies, ontworpen.

Een opleiding is een ingewikkeld systeem van onderwijs-leer-relaties. Kinderen, onderwijzers die als onderwijzers van kinderen maar ook als mentoren van studenten optreden, studenten die kinderen onderwijzen en door mentoren en leraren onderwezen worden, P.A.-opleiders die voor de klas en in de klas staan en van elkaar leren, onderwijsontwikkelaars die met de opleiders een team vormen. Iedereen in dit stelsel ondergaat leerprocessen en neemt leerprocessen waar, van kinderen, van studenten, van zijnsgelijken, van hogergeplaatsten in het onderwijsleerproces, van anderen, maar ook van zichzelf. Wat we trachten te doen, is deze processen bewust te maken, in discussies en in verslagen. Of preciezer: we trachten middelen te vinden om ze bewust te maken en de mentaliteit te kweken, ze bewust te willen maken.

Terug- en vooruitblik

Veel losse observaties en enkele conclusies? Zijn ze terecht? Denk er eens over na.

Maar nu laat ik u alle vrijheid. Observaties zonder conclusies, soms zelfs zonder vragen, die u dan maar zelf moet verzinnen.

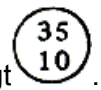
9 Studentenhaver

Met ‘studenten’ bedoel ik hier PA- of KLOS-studenten, maar ieder ander die meent dat de schoen hem past, mag hem aantrekken. De haver die ik ze wil laten proeven, bestaat uit mathematisch-didactische probleempjes, die ik de studenten, als ik hun opleider was, bij tijd en wijle zou opgeven om met ze te bediscussiëren, om ze onderling te laten bediscussiëren, waar ik ze een werkstukje over zou laten maken of op het examen over zou ondervragen. Losse verhaaltjes, maar voor wie er een lijn in wil ontdekken, losjes verbonden, op zijn minst door de mathematisch-didactische lijn.

1. Daphne wordt op 17 maart zeven jaar. Op 6 maart vraag ik haar hoe lang dat nog is. Ze telt op haar vingers ‘7, 8, 9, ..., 17’ en zegt: ‘11 dagen.’ Op 7 maart vraag ik het haar weer. Ze zegt direct: ‘10 dagen.’
2. Daphne vroeg plotseling: ‘Wat is de laatste letter,’ maar kennelijk bedoelde ze dat niet. Dat ‘z’ de ‘laatste’ is, weet ze immers. Ze zoekt naar woorden, zoiets als ‘het laatste cijfer’. En toen kwam het eruit - waarom kostte het haar zoveel moeite? - ze wilde het grootste getal weten. Het ging toen als op een veiling. ‘Als ik nu 1000 zeg?’ Verontwaardigd: ‘Een miljoen!’ ‘En als ik een miljoen zegt?’ ‘Haha, een miljard!’ (Weet zij wat een miljard is?) ‘En als ik een miljard zeg?’ ‘Een miljard miljarden!’ ‘En als ik een miljard miljarden zeg?’ ‘Een miljard miljarden miljarden!’ Zo ging het een poosje door tot we moesten ademhalen. Monica, drie jaar ouder, zat er met grote ogen naar te kijken. Ik zei tegen haar: ‘Het gaat ook met stapjes van 1. Bijvoorbeeld na 1 384 260...?’De ogen gingen liefst nog verder open. Achteraf dacht ik: ‘Heb je dat wel goed gedaan?’Wat denkt u?
3. Ik loop met Daphne aan de overkant van het Amsterdam-Rijnkanaal. De hectometers kanaallengte zijn met stenen gemarkeerd, bijvoorbeeld

,

, ... Na,

vraag ik Daphne wat nu zou komen. Ze zegt 

. Het blijkt

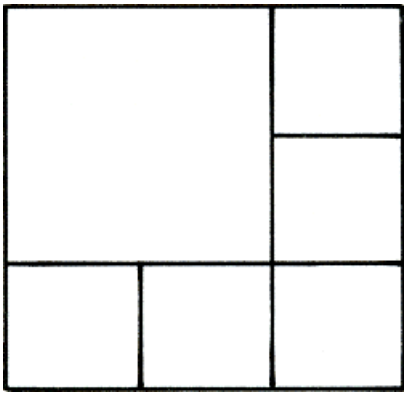
te zijn. We gaan verder. Bij

vraag ik opnieuw naar de volgende. Ze zegt

.
4. Monica (7½) telt spontaan razend snel achteruit van 100. Na 70 haalt ze adem en zegt: ‘Als ik bij 1 was begonnen, was ik nu bij 30.’
5. Ik vraag Monica (9): ‘Een moeder en haar dochtertje zijn samen 21 jaar oud. Hoe oud is elk afzonderlijk?’ De broer (twee jaar ouder), moeder en vader zitten erbij. Schrijf een treurspel in één acte over wat er toen gebeurd zou kunnen zijn.
6. Ik vraag Monica (9): ‘Jan en Piet hebben samen 10 knikkers; Jan heeft er 4 meer dan Piet; hoeveel heeft elk?’ Vrij vlug geeft zij het goede antwoord. ‘Hoe deed je het?’ ‘Ik deed eerst 4 + 4, dat is 2 teveel; toen deed ik één minder.’ De twee jaar oudere broer mocht ondertussen de oplossing zijn vader in het oor fluisteren. Hij zei: ‘9 en 1.’

7. Bastiaan (9). Een boerderij met kippen en konijnen, 10 koppen, 24 poten. Hij onmiddellijk: ‘8 kippen.’ ‘Hoe deed je dat?’ ‘⅓ van 24.’
8. ‘Bij... in de winkel is het 's middags gemiddeld drukker dan 's ochtends!’ Bastiaan vraagt: ‘Wat betekent “gemiddeld”?’ Antwoord van een volwassene: ‘Als je bijvoorbeeld hebt 26 en 17 en 41; kunt je dat optellen? ... Ja, goed zo, en dat moet je door drie delen.’
9. Ik vraag Monica (8½) of ze wist wat elven waren. Natuurlijk wist ze het. ‘Hoeveel zijn nu twee elfjes?’ Ze insisteert op: ‘Twee.’ Bastiaan (10½): 22 gulden-waardeloos!’
10. Daphne (6) beweert ineens dat 9 even is. ‘Nou, hoezo?’ ‘3 keer 3.’
11. Op het dak zitten 10 mussen; de jagers schieten er 4 af; hoeveel blijven er zitten? In een vierkante kamer zit er in elke hoek een kat en elke kat heeft er drie vóór zich. Hoeveel katten? Een grootvader, twee vaders, twee zoons, één kleinzoon. Hoeveel mensen? Op welke leeftijd worden kinderen deze puzzelvragen gesteld en op welke stellen zij van hun kant dit soort vragen?
12. Aan een Franse universiteit stelden ‘heuristiek’-onderzoekers (wat zijn dit?) aan vierdejaars wiskundestudenten in groepen van vier het volgende probleem:

    Men kan een vierkant uiteraard in vier vierkanten verdelen, ook in 9, ook bijvoorbeeld in 6. Gaat het ook in 7, 8, 10 enz.? Tot 10 speelden ze het klaar; met 11 lukte het hen niet meer. Ik gaf het vraagstuk aan een derde klas lagere school in deParijse ‘banlieue’. De achtjarigen speelden klaar wat de wiskundestudenten niet was gelukt; ze losten het probleem helemaal op. Iets voorn en voor de kinderen onder uw hoede!



figuur 9.1

13. Zes mensen A, B, C, E, F gaan op goed geluk in de rij staan. Hoe groot is de kans dat A links van B staat? Een wiskundig didacticus schreef alle 720 volgordes van de letters A, B, C, D, E, F onder elkaar, streepte die aan waar A links van B stond en rekende die fractie uit, waarbij hij zich nog vergiste. Zou het ook uit je hoofd kunnen?
14. In een hoed zijn 20 balletjes, 19 zwarte en een witte, bestemd voor 20 mensen om uit te trekken. Wie de witte trekt heeft gewonnen. Doet het er toe in welke volgorde ze trekken? Wie het eerst mag trekken heeft een kans van 1/20 om te winnen. Hoe is het met wie als tweede

mag trekken? Wel, misschien komt hij niet eens aan de beurt, maar áls hij wel aan de beurt komt, heeft hij nu een kans van 1/19 om te winnen. En met wie als derde mag trekken, is het navenant. Zou de volgorde er niet toe doen? Zouden ze misschien toch allemaal dezelfde kans hebben? Je kunt wat preciezer redeneren: De eerste heeft de kans 1/20 dat hij wint. De tweede heeft de resterende kans 19/20 om aan de beurt te komen en dan de kans 1/19 om te winnen. Dus 19/20 keer 1/19 is 1/20. Met de derde is het navenant. De kans dat de eerste wint is 1/20, de kans dat de tweede wint is 1/20, de kans dat de derde een beurt krijgt, is de resterende 18/20, de kans dat hij dan - met de resterende 18 balletjes in de hoed - de witte trekt, is 1/18. Dus 18/20 keer 1/18, is weer 1/20. Enzovoort. Maar moet het echt zo? Laten we in plaats van 20 balletjes 200 000 loten nemen met - maar dat doet er niet toe - maar één winst. Dat noem je een loterij. Doet het er bij een loterij toe of ik het eerste lot te pakken krijg dat verkocht wordt? Hé, als je de mensen bij de loterijcollecteur in de rij ziet staan, zou je soms geloven van wel. Staan ze daarom zo vroeg op? Neen, ik denk dat ze een mooi nummer willen uitzoeken. Dus puur bijgeloof. Maar cijferen en breuken is ook een soort bijgeloof. De hoed en de loterij - wat is het verschil? Of is er geen verschil? En als er wel verschil is, waar bestaat het uit en is het van betekenis? En als het niet van betekenis is, waarom niet? En hoe leg je het een ander uit? En is er verband met het vorige verhaal? En bent u verzadigd?

Terug- en vooruitblik

Is het gelukt? U kunt het bewijs leveren door zelf naar kinderen te kijken. Doe het dan.

Bronvermelding

1. *De Wereld van het Jonge Kind*, maart-april 1979, 143-147, 169-172
2. *Moer*, 1983, 6, 1-7.
3. *Willem Bartjens* 3 (1983/4), 1, 60-65.
4. Samenvattende vertaling van de opstellen: Rechnen - gibt es das noch? *Mathematiklehren*, november 1983, 4-9, en *Didactical principles in mathematics instruction. Aspects of Mathematics and its Applications*. Noordhollandse Uitgeversmij 1984, Mathematical Library, volume in honor of Leopoldo Nachbin.
5. *Wiskobas Bulletin*, leerplanpublicatie 9, IOWO juli 1978, handleiding, 109-120.
6. *Wiskrant* 17, mei 1979, 5-9, waarin stukken verwerkt van *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren*. (IOWO-publikatie, te verschijnen bij Vakgroep OW & OC).
7. *Wiskunde en Didactiek in de Onderwijzersopleiding, blok 'Meten'* (1976), 8-17.
8. *Jaarverslag over* 1977,Provinciaal Utrechts Genootschap (1978), 8-18. Zie voor onderdelen ook Weeding and Sowing, Reidel, 1978, IV 8.
9. *Willem Bartjens* 1 (1981/2), 4, 214-215.